

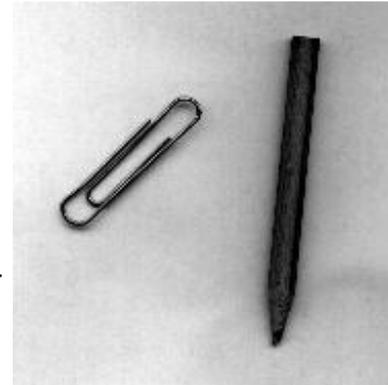
Traktrix - Schleppkurve

Haben Sie sich schon einmal gefragt, wie ihr Auto sich genau fortbewegt, wenn sie aus einer Parklücke fahren ? Sie schlagen die Vorderräder ein und fahren los. Die beiden Vorderräder bewegen sich dann zunächst entlang eines Halbkreises. Was aber machen die Hinterräder ?

Man kann dieses Problem oft antreffen: Wie fährt das hintere Rad des Fahrrads, wenn sie lenken ? - Welche Bahn hinterlässt ein Schlitten im Schnee ? - Wie folgt ein Anhänger seiner Zugmaschine ? und dergleichen mehr:

Schon Huygens, Leibniz und Euler beschäftigten sich mit den sogenannten Verfolgungsproblemen, zu denen auch die bekannte *Hundekurve* zählt. Diese kommt aber nicht in unseren Zusammenhang vor.

Um diesen allerdings etwas besser zu begreifen, kann man folgendes Experiment machen: Nehmen sie eine etwas größere Büroklammer und zwei Bleistifte her. Die beiden Stifte werden in die "Rundungen an den beiden Enden der Klammer" gehalten. Mit den einen Stift zieht man den anderen über ein Blatt Papier. So zeichnet man die "Zugkurve" und die "Verfolgerkurve" auf.



Abhängig von der Zugkurve ändert sich auch die Verfolgerkurve. Man erkennt, dass die Besonderheit dieser "Verfolgung" folgendes ist:

- Der Verfolger bewegt sich in jedem Moment entlang der Tangenten an den Punkt der Verfolgerkurve, an dem er sich gerade befindet.
- Der Abstand zwischen "Flüchtling" und "Verfolger" ist stets gleich (hier gleich der Länge der Klammer)

Frage ist nun: Wie kann man den Verlauf der Verfolgerkurve bestimmen, wenn man die Zugkurve vorgibt ?

Die zu Beginn beispielhaft aufgeführten Fälle entsprechen komplizierten Bewegungen, schon wegen der Komplexität der Zugkurve (im einfachsten Fall ein Halbkreis - beim Auto-Parklücken-Beispiel).

Der einfachste Fall ist: Die Zugkurve ist eine Gerade. Legen wir ein Koordinatensystem günstig, so verläuft diese entlang der x-Achse, was wir von nun an annehmen wollen. Die Ausgangslage der Klammer (also der konstanten Strecke) ist unerheblich, da man dadurch nur einen bestimmten Teil der zu bestimmenden Verfolgerkurve auslöst. Zu jedem Zeitpunkt wird der Endpunkt der Klammer momentan entlang der Tangente an die Verfolgerkurve bewegt. Das ist unabhängig von der tatsächlichen Anfangslage der Klammer. Wir vereinfachen das Problem, indem wir die Klammer anfangs entlang der y-Achse platzieren.

Dann haben wir es zu tun mit dem Fall der einfachsten Verfolgerkurve, der sogenannten *Traktrix*.

Mit einem CAS oder einer Formelsammlung kann man das Problem lösen und den Verlauf der Traktrix ermitteln.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x_z - x}{y} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} \Rightarrow x = \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = \sqrt{a^2 - y^2} - a \cdot \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right)$$

Dies ist für y zwischen a und 0 die Beschreibung der Traktrix. Dabei wurde zu Beginn die reziproke Steigung angesetzt, da es sonst Probleme mit der unendlich großen Steigung bei $x=0$ gibt.

