

"Laufspiel" im Kreis oder "Sekantenspiel"

Diese Aufgabe kann in der 10. Klasse im Rahmen der Trigonometrie im Bereich von Bogenmaß, Kreissegment und Bogenlänge, sowie Umfang, behandelt werden. Sie steht dennoch in der Rubrik "besondere Beiträge zur Mathematik", da es sich hier nicht um ein Arbeitsblatt handelt, sondern um einen größeren Aufgabenkomplex, der für den einzelnen Unterrichtsfall nach- oder überarbeitet werden muss. Es handelt sich lediglich um ein Grundproblem, um eine Grundidee.

Problematisierung: Es soll ein Laufspiel gespielt werden. Ein Kreis mit einem festgelegten Radius (wir setzen diesen jetzt zur Vereinfachung auf $r=1$) wird bestimmt. Zwei Personen laufen auf diesem Kreis gegen den Uhrzeigersinn. Ziel des Spiels ist es, herauszufinden, wo die zwei Personen starten müssen, so dass sie gleichzeitig die Startposition ihres Partners erreichen. Das einfachste Beispiel ist: Wenn bei gleich schnell laufen, so muss ihre Entfernung gleich dem doppelten Radius sein. Es stellt sich, wenn man es einmal wirklich macht, heraus, dass die genaue Position der Spieler unwichtig ist. Die charakteristische Angabe, die man braucht, ist der kürzeste Abstand der Startpositionen (Sekantenlänge!).

Aufgabe: Um etwas Übersicht in die möglichen Teilaspekte dieses Spiels zu bringen, ist die folgende Aufgabenkette nützlich. Ein CAS ist hilfreich. Ebenso eignet sich diese Aufgabe für den Einsatz des Geometrieprogrammes EUKLID.

1. Welchen Abstand müssen die Personen anfangs voneinander haben, wenn die eine Person doppelt so schnell wie die andere läuft?
2. Welche Strecken legen die beiden einzeln zurück?
3. Um welchen Faktor ist Person 1 schneller als Person 2, wenn ihr kürzester Abstand voneinander am Anfang $\sqrt{2}$ beträgt?
4. Der kürzeste Abstand zwischen den laufenden Personen (Person 1 läuft doppelt so schnell) ändert sich ständig. Kann man eine Funktion angeben, die diese Veränderung beschreibt?
5. Es scheint klar zu sein, dass die sich in Länge und Lage ständig ändernde Sekante (Abstandslinie zwischen den laufenden Personen) irgendwann einmal durch den Mittelpunkt des Kreises verlaufen muss: Kann man sich anschaulich klar machen, wann dies der Fall ist? Man kann den Zeitpunkt, bzw. den bereits umlaufenen Winkel (einer Person - das reicht !!) berechnen.