Teilflächen in einem gotischen Kirchenfenster

In dem gotischen Bau der Basilique Saint-Remi in Reims kann man neben der bekannten Fensterrose über dem Hauptportal die gotischen Fensterkonstruktionen bewundern.

Hier soll kurz vorgestellt werden, wie die Fenster aufgebaut sind und wie man sich im Unterricht einer Klasse 10 mit ihnen auseinandersetzen kann

Abbildung 1

Die rechte Abbildung zeigt den uns interessierenden oberen Teil eines Fensters. Für diesen Fenstertyp charakteristisch ist die Zusammensetzung des großen Bogens aus einem Vollkreis und 2 Halbkreises von gleichem Radius bzw. aus dem Vollkreis und den gelb angedeuteten untereinander gleichen kleineren Bögen.

Die für die Konstruktion besonderen Bestimmungsstücke der einzelnen geometrischen Formen sollten sinnvollerweise zu Beginn des Unterrichts analysiert werden. Dabei untersucht man in der nicht eingefärbten Skizze (Abbildung 3) die Radien der vorkommenden Kreise, Halbkreise, Kreisbögen und Hilfskreise.

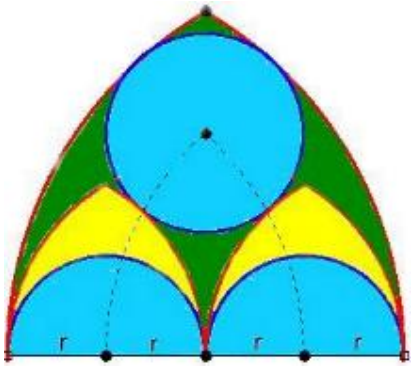

Abbildung 2

Der allem zugrunde liegende Radius wird mit *r* bezeichnet. Er ist zugleich auch der kleinste aller vorkommenden Radien und der Radius aller blauen Kreise. Die kleinen Kreisbögen weisen den Radius *2r* auf und der große Außenbogen entspricht dem Radius von *4r*. Die gestrichelt eingezeichneten Hilfsbögen erlauben die Konstruktion des Mittelpunktes des Vollkreises und haben einen Radius von *3r*. Also kommen die ersten ganzzahligen Vielfachen des Grundradius alle vor.

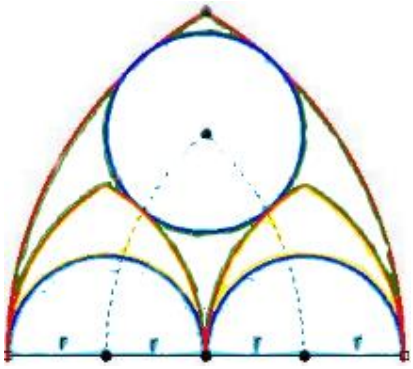

Abbildung 3

Der grundlegende Wert einer Auseinandersetzung mit der hier gezeigten Konstruktion liegt neben dem ästhetischen Empfinden und der allgemeinbildenden Komponente im Erkennen der Teilflächen, der Zusammenhänge und der Berechnung der Flächenmaßzahlen.

Zuerst fällt die Symmetrie zur senkrechten Achse auf, so dass es ausreicht, eine Hälfte des Fensters zu betrachten (siehe Abbildung 4).

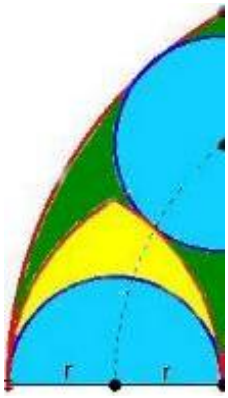

Abbildung 4

Wir können die verschiedenen Teilflächen berechnen. Dabei sind die Angaben immer auf das ganze Fenster (Abbildung 2) bezogen. Wir nutzen die Symmetrie dabei nur aus.

Die blauen Flächen betragen zusammen

$$b = 2\pi r^2$$

Die gesamte Fläche, also alle Farben zusammengenommen, wird von der Höhe *H* in zwei gleich große Teile geteilt (Abbildung 5 dient als Hilfe):

$$H = \sqrt{(4r)^2 - (2r)^2} = 2\sqrt{3} \cdot r$$

Demzufolge beträgt diese Gesamtfläche:

$$A = 2 \cdot \frac{1}{6}\pi(4r)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} 2r \cdot 2\sqrt{3} \cdot r = 2 \cdot r^2 \left(\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}\right)$$

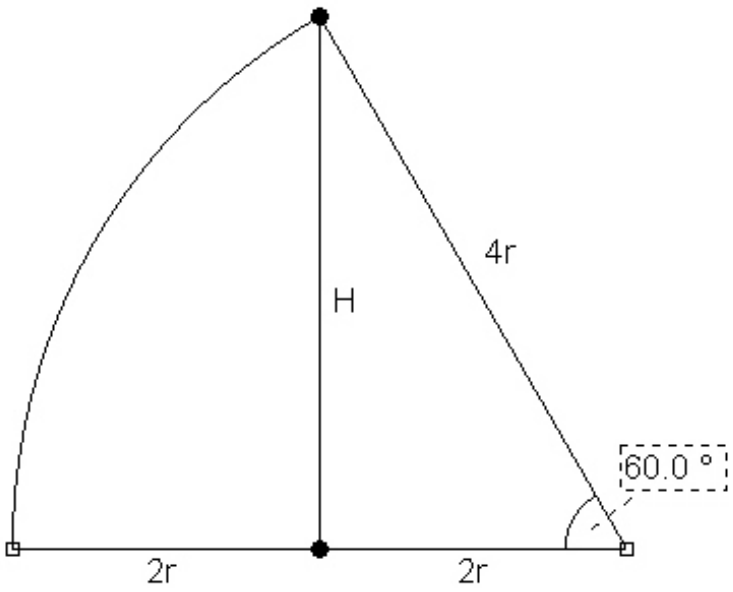

Abbildung 5

Für die grünen und gelben Teilflächen benötigen wir die Differenz aus Gesamtfläche und der Summe der blauen Flächen:

$$A_{gegr} = 2 \cdot r^2 \left(\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3} - \pi\right) = 2 \cdot r^2 \left(\frac{5}{3}\pi - 2\sqrt{3}\right)$$

Die gelben Teilflächen ergeben sich analog zu der Berechnung der Gesamtfläche, wenn man zuerst die Höhe berechnet und die blauen Halbkreise abzieht:

$$A_{ge} = 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\pi(2r)^2 - \frac{1}{2} r \cdot \sqrt{3} \cdot r\right) - \pi \cdot r^2 = 2 \cdot r^2 \left(\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right)$$

Somit beträgt die gesamte grüne Fläche:

$$A_{gr} = A_{gegr} - A_{ge} = 2 \cdot r^2 \left(\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right) = A_{ge}$$