Verbreitung von Gerüchten

Von Gerüchten sagt man, dass sie sich "wie im Lauffeuer" verbreiten. Was hat man sich eigentlich darunter vorzustellen ? Wie schnell geht das ?

Wie kann man den Vorgang mathematisch modellieren ?

Nach welchem Gesetz vergrößert sich die Anzahl der "Wissenden" ?

Voraussetzung für die Verbreitung eines Gerüchtes: Um es etwas zu konkretisieren, gehe man von der Verbreitung eines Gerüchtes in einer Schule aus. In die Schule gehen N=1000 Schülerinnen und Schüler. Für jeden Zeitpunkt *t* seit dem Tag, an dem die erste Person von "etwas irgend etwas weiß" gebe die Funktion *W(t)* die Anzahl der Wissenden an. Am Anfang sei also: *W(0)=1*.

Die Verbreitung des Gerüchtes hängt natürlich in entscheidender Weise vom "kommunikativen Verhalten" der Schüler ab. Wir sollten von dem wünschenswerten Fall ausgehen, dass jeder Schüler prinzipiell mit jedem Schüler aus jeder Jahrgangsstufe redet. Wir müssen festlegen, wie oft ein Schüler in einer Zeiteinheit (etwa ein Tag) sein Wissen einem noch nicht Wissenden anvertraut. Dies sei angegeben durch die Zahl *k>0*. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wissende auf einen Nichtwissenden trifft, ist *p=(N-W(t))/N.*

In der Zeitspanne *dt* gibt ein Wissender also an *p*k*dt=(N-W(t))/N*k*dt* Personen seinen Wissen weiter. Insgesamt wird also bei der Anzahl *W(t)* der Wissenden in der Zeitspanne *dt* an *dW=W(t)*(N-W(t))/N*k*dt* Personen das Gerücht weitergegeben.

Formt man um, so erhält man die Differentialgleichung: *dW/dt = W(t)*(N-W(t))/N*k*. Eine Differentialgleichung dieses Typs wird *logistische Differentialgleichung* genannt. Die Lösung einer solchen Differentialgleichung sei angegeben und kann in der einschlägigen Literatur nachgelesen werden:

$$y'(x) = \mu \cdot y(x) \cdot \left(1 - y(x)\right) \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{y(0)} - 1\right) \cdot e^{-\mu x}}$$

Überträgt man dies auf unseren Sachverhalt, so kann man die Funktion *W(t)* bestimmen:

$$W'(t)=\frac{k}{N}W(t)\cdot\left(N-W(t)\right)=k\cdot W(t)\cdot\left(1-\frac{W(t)}{N}\right)\Leftrightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{W(t)}{N}\right)=k\cdot\frac{W(t)}{N}\cdot\left(1-\frac{W(t)}{N}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{W(t)}{N}=\frac{1}{1+\left(\frac{N}{W(0)}-1\right)\cdot e^{-kt}}=\frac{1}{1+\left(N-1\right)\cdot e^{-kt}}\Rightarrow W(t)=N\cdot\frac{1}{1+\left(N-1\right)\cdot e^{-kt}}$$

Auf der Grundlage dieser Berechnung kann man sich nun die Ausbreitung des Gerüchtes anschauen. Dies wird hier unter Verwendung des CAS Maple ausgeführt (N=1000, schwarz: k=3, blau: k=2, rot: k=1)