

Manche Verzweiflung war berechtigt

Mit den Methoden der Gruppentheorie kann man zeigen, dass nicht jede Ausgangsstellung des sogenannten 15er-Spiels geeignet ist, um aufgelöst zu werden. Ziel des Spiels ist, die zuvor beliebig angeordneten Spielsteine nur durch Verschiebungen in die richtige Reihenfolge zu bringen, wie es die Skizze verdeutlicht.

9	6	3	13
1	5	7	2
14	4	8	11
10	15	12	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Man kann durch nicht weiter interessierende Verschiebungen immer den leeren Platz an die Position (4,4) bewegen, so dass wir o.B.d.A. von dieser Ausgangsstellung ausgehen können. Jede Stellung lässt sich eindeutig als eine Permutation aus der vollen symmetrischen Gruppe vom Grad 15 in Zykelschreibweise darstellen. Auf dieser Gruppe ist die Multiplikation definiert, die wir von rechts durchführen. Das freie Feld erhält die fiktive Nummer 16. Die Zyklen beschreiben die Lage von 16 Punkten, d.h. es liegt eine Permutationsdarstellung der S_{15} als Untergruppe der S_{16} vor, da jede Permutation einen Zustand beschreibt, bei dem das freie Feld auf (4,4) liegt. Die Beschreibung weist jeder Nummer im rechten Bild (Endzustand) die tatsächlich darüberliegende Nummer zu (linkes Bild). In diesem Beispiel wird der linke Zustand durch $\varphi = (1,9,14,15,12,11,8,2,6,5)(3)(4,13,10)(7)$ beschrieben.

Jeder Spielzug ist vom Wesen her gleich. Es kann nur ein Stein auf eine seiner Nachbarpositionen geschoben werden, insofern dort das freie Feld vorliegt. Es werden dann die Nummer des Spielsteins und die Nummer 16 in der beschreibenden Permutation getauscht. Dies erreicht man durch die Multiplikation der ursprünglichen Permutation φ mit einer Transposition τ und man erhält die neue Permutation $\delta = \varphi \tau$. Mehrere Züge hintereinander erreicht man durch wiederholte Multiplikation mit der entsprechenden Transposition.

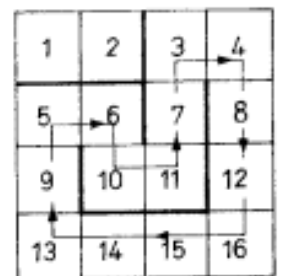
Kann man nun das Spiel von φ ausgehend durch k Züge lösen, so erreicht man die dem Zielzustand entsprechende Permutation ε , also die Identität in der Gruppe, durch die Multiplikation $\varphi \tau_1 \tau_2 \tau_3 \dots \tau_k = \varepsilon$, d.h. $\varphi = \tau_k \dots \tau_3 \tau_2 \tau_1$, da Transpositionen zu sich selbst invers sind. Dieses Produkt ist zugleich die Zerlegung der gegebenen Permutation φ in ihre Transpositionen und man zeigt nun:

Kann man von einer Ausgangsposition φ (beachte, dass (4,4) frei ist) zum Endziel gelangen, so ist die Permutation φ gerade.

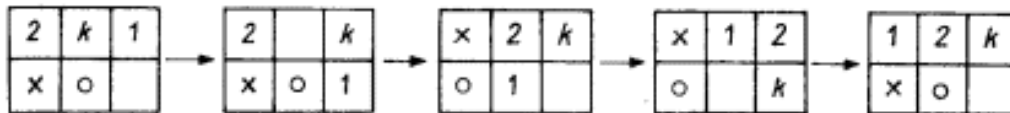
Ein Spielstein hat die Koordinaten (i,j) und durch seine Verschiebung ändert sich die Summe $i+j$ um $+1$ oder -1 . Dies gilt insbesondere für den fiktiven Stein mit der Nummer 16, der anfangs und am Ende auf (4,4) steht. Damit die Summe seiner Koordinaten wieder gerade werden kann, muss es eine gerade Anzahl von Zügen (realisiert durch die Transpositionen) sein, d.h. φ ist gerade.

Man zeigt nun noch, dass diese Bedingung sogar hinreichend für die Lösbarkeit des Spiels ist. Der Beweis reicht aus für die Erzeuger der Untergruppe der geraden Permutationen. Diese wird erzeugt durch die Elemente $(1,2,3)$, $(1,2,4)$, $(1,2,5)$, ... $(1,2,15)$, denn wir gehen wie immer von einer Ausgangssituation aus, bei der (4,4) frei ist. Der Dreierzykel $(1,2,k)$ bedeutet bei zweilenweisem Durchschreiten des Spielfeldes, dass auf dem Feld 1 die Nummer 2, auf dem Feld 2 die Nummer k und auf dem Feld k die Nummer 1 vorliegt.

Man kann nun einen Zugmodus einführen, mit dem man später jeden Zug realisieren kann. Die Graphik beschreibt diesen. Es können dabei bis auf die Steine auf den ersten beiden Feldern alle anderen (auch das freie Feld) im Uhrzeigersinn bewegt werden, wobei sich ihre Anordnung relativ zueinander nicht ändert. Bei jedem Erzeuger der A_{15} befindet sich der Spielstein mit der Nummer 1 nicht auf den ersten beiden Feldern, kann also durch Rotation auf das dritte Feld bewegt werden. Durch Verschie-



bung des freien Feldes in entgegengesetzte Richtung machen wir das siebte Feld frei. Nun greift ein zweiter Zugmodus, der durch die Graphik verdeutlicht wird.



Ohne letztendliche Positionsänderung der anderen Spielsteine werden die ersten beiden Positionen richtig besetzt. Da bei dem Zustand, der durch die Permutation $(1,2,k)$ beschrieben wird, alle anderen Spielsteine außer 1,2, und k von vorne herein auf ihrem richtigen Platz standen, und da nun auch 1 und 2 richtig stehen, kann man durch Zurückrotieren die erste Rotation, die den Spielstein 1 auf den dritten Platz beförderte, alle Spielsteine wieder auf ihren alten Platz zurückbringen. Damit steht dann auch der Spielstein k auf dem k -ten Platz und das Spiel ist gelöst. Nun ist es also für jeden Erzeuger der A_{15} gelöst und damit für jedes Produkt, das Ausgangszustand sein kann und muss, weil dies die notwendige Bedingung ist. Somit ist dies auch hinreichend und es kann das Spiel nur dann gelöst werden, wenn der Ausgangszustand durch eine Permutation aus der A_{15} beschrieben werden kann.

Ich als Kind nahm schon einmal dieses Spiel aus lauter Verzweiflung auseinander und baute es dann wieder zusammen mit dem Resultat, dass der neue Zustand nicht diesen Anforderungen entsprach.

Literatur: Kaloujnine, L.A. und V.I. Suscansjkij. *Transformationen und Permutationen*. Verlag Harri Deutsch. 1986.