

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9}$ mit maximalem Definitionsbereich D_f . Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

- 4 1. a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D_f , die Nullstellen von f und das Symmetrieverhalten von G_f an.
- 6 b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs und geben Sie die Asymptoten von G_f an.
- 6 c) Bestimmen Sie Art und Lage des relativen Extrempunkts E von G_f .
[Zur Kontrolle: $E(0 | \frac{1}{3})$]
- 6 d) Berechnen Sie $f(2,5)$ sowie $f(4)$ und skizzieren Sie den Graphen G_f und seine Asymptoten unter Berücksichtigung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $-7 \leq x \leq 7$.
- 7 2. a) $F : x \mapsto x + \ln \frac{3-x}{x+3}$ ist Stammfunktion von f im maximalen Definitionsbereich D_F (Nachweis nicht erforderlich).
Zeigen Sie, dass $D_F =]-3; 3[$ der maximale Definitionsbereich von F ist.
Berechnen Sie den Inhalt A der Fläche, die G_f mit der x -Achse einschließt, auf zwei Dezimalen genau.
[Zur Kontrolle: $A \approx 0,83$]
- 4 b) Begründen Sie, beispielsweise mit Hilfe von Flächenbetrachtungen, dass die Integralfunktion $F_0 : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ im Intervall $]-3; 3[$ drei Nullstellen hat.
(Hinweis: Die Nullstellen müssen nicht berechnet werden.)

(Fortsetzung nächste Seite)

3. Betrachtet werden nun Funktionen der Form $f_{a,b} : x \mapsto \frac{x^2 - a}{x^2 - b}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq b$ im jeweils maximalen Definitionsbereich. Ihre Graphen werden mit $G_{a,b}$ bezeichnet. Beispielsweise erhält man für $a = 3$ und $b = 9$ obige Funktion f .

3

a) Was muss für b gelten, damit $f_{a,b}$ in ganz $\mathbb{R}$ definiert ist?

Geben Sie die Zahl der Nullstellen in Abhängigkeit von a an.

4

b) Einer der drei abgebildeten Graphen $G_{a,b}$ gehört zum Fall $0 < b < a$.

Geben Sie an, welcher dies ist, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie erklären, warum die beiden anderen Graphen für den Fall $0 < b < a$ nicht in Betracht kommen.

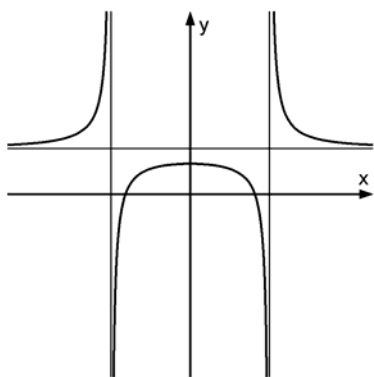


Abb. 1

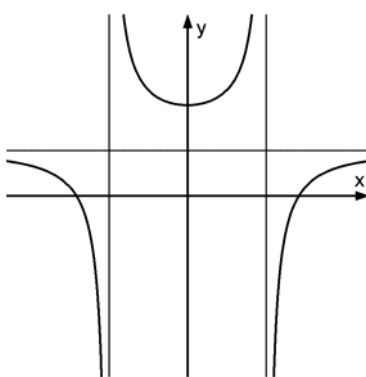


Abb. 2

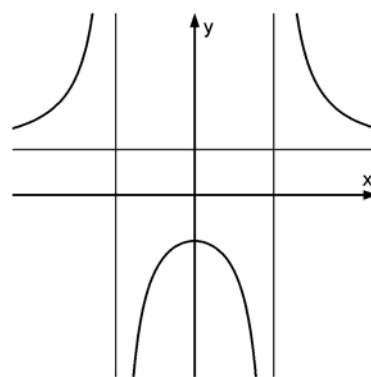


Abb. 3

BE

II.

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{4x}{e^{0,5x}}$ mit Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.

G_f bezeichnet den Graphen von f .

- 5 1. a) Geben Sie die Nullstelle der Funktion an und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Grenzen des Definitionsbereichs. Geben Sie die Gleichung der horizontalen Asymptote von G_f an.
- 10 b) Untersuchen Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten von G_f . Ermitteln Sie Lage und Art des Extrempunkts sowie die Lage des Wendepunkts von G_f . [zur Kontrolle: $f'(x) = e^{-0,5x}(4 - 2x)$]
- 7 c) Die Gleichung der Wendetangente w lautet $y = \frac{-4}{e^2}x + \frac{32}{e^2}$.
Bestätigen Sie dies durch Rechnung und ermitteln Sie den spitzen Winkel (auf Grad genau), unter dem w die y -Achse schneidet.
- 6 d) Berechnen Sie die Funktionswerte an den Stellen $\frac{1}{2}$, 1 und 6. Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_f und die Wendetangente w im Bereich $-1 < x < 9$ (Längeneinheit: 1 cm).
- 3 2. a) Zeigen Sie, dass $F: x \mapsto \frac{-8x - 16}{e^{0,5x}}$, $D_F = \mathbb{R}$, eine Stammfunktion von f ist.
- 4 b) Der Graph G_f , die x -Achse und die Gerade $x = 6$ schließen eine Fläche vom Inhalt A ein. Berechnen Sie A auf 2 Dezimalen gerundet.
- 5 3. Skizzieren Sie einen Anwendungszusammenhang beispielsweise aus den Naturwissenschaften oder der Wirtschaftslehre, in dem eine Funktion der Art $x \mapsto a \cdot e^{bx}$ eine wichtige Rolle spielt ($a, b \neq 0$).
Begründen Sie kurz, ob der Parameter b in dem von Ihnen beschriebenen Anwendungszusammenhang positiv oder negativ ist.
Welche Bedeutung hat der Parameter a ?

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

BE	
	Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \ln(4+x) - \ln(4-x)$ mit der Definitionsmenge $D_f =]-4;4[$. G_f bezeichnet den Graphen von f .
3	1. a) Untersuchen Sie f auf Nullstellen und ermitteln Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs.
2	b) Zeigen Sie, dass G_f punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung verläuft.
8	c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f . Weisen Sie nach, dass G_f genau einen Wendepunkt besitzt und berechnen Sie dessen Koordinaten. $\left[\text{Zur Kontrolle: } f'(x) = \frac{8}{16-x^2} \right]$
5	d) Berechnen Sie $f(-3)$, $f(-2)$ und $f'(0)$. Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen von f in ein Koordinatensystem (Längeneinheit 1cm).
7	e) Begründen Sie, dass die Funktion f eine Umkehrfunktion f^{-1} mit $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ besitzt, und bestimmen Sie den Funktionsterm von f^{-1} . Zeichnen Sie den Graphen von f^{-1} in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1d.
	2. Gegeben ist außerdem die Funktion $g: x \mapsto \ln(4+x)$ mit $D_g =]-4;4[$. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.
3	a) Zeigen Sie, dass G_f und G_g genau einen gemeinsamen Punkt $S(x_S y_S)$ haben, und bestimmen Sie dessen Koordinaten. $[\text{Zur Kontrolle: } x_S = 3]$
4	b) Zeigen Sie, dass G_f für $x \in]-4;3[$ unterhalb und für $x \in]3;4[$ oberhalb von G_g verläuft.
5	c) Beweisen Sie, dass $K: x \mapsto -x - (4-x) \cdot \ln(4-x)$ mit $D_K =]-4;4[$ eine Stammfunktion von $g - f$ ist, und berechnen Sie $J_1 = \int_0^1 [g(x) - f(x)] dx$ auf zwei Dezimalen genau.
3	d) Begründen Sie, für welchen Wert $t \in]-4;4[$ das Integral $J_t = \int_0^t [g(x) - f(x)] dx$ den größten Wert annimmt.
40	

BE

II.

Gegeben ist die Schar von Funktionen $f_k: x \mapsto \frac{2x-k}{(x+k)^2}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und maximalem Definitionsbereich D_k . Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

- 6 1. a) Bestimmen Sie D_k und das Verhalten von f_k an den Rändern des Definitionsbereichs. Geben Sie alle Asymptoten von G_k an.
- 2 b) Berechnen Sie die Schnittpunkte von G_k mit den Koordinatenachsen.
- 9 2. a) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_k in Abhängigkeit von k .

$$\left[\text{Zur Kontrolle: } f_k'(x) = \frac{4k-2x}{(x+k)^3} \right]$$
- 6 b) Berechnen Sie $f_1(-4)$, $f_1(-2)$ und $f_1(4)$. Zeichnen Sie nun mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_1 im Intervall $[-6; 6]$ in ein Koordinatensystem ein. (Querformat, Abstand zwischen Ursprung und unterer Blattkante: 11 cm, Längeneinheit 2 cm)
- 6 c) Zeigen Sie, dass die Extrempunkte aller Graphen G_k auf der Kurve C mit der Gleichung $y = \frac{2}{3x}$ liegen. Bestimmen Sie den Schnittpunkt dieser Kurve mit der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten und zeichnen Sie die Kurve C für $x > 0$ in das Koordinatensystem von Aufgabe 2b ein.
3. Im Folgenden wird nun die Funktion f_1 betrachtet.
- 4 a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \mapsto 2\ln(x+1) + \frac{1-2x}{x+1}$ für $x > -1$ eine Stammfunktion von f_1 ist.
- 7 b) Berechnen Sie den Inhalt J der Fläche, die von G_1 , der Kurve C der Extrempunkte und der Geraden mit der Gleichung $x = 1$ eingeschlossen wird, auf 2 Dezimalen genau.

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

BE	I.
	1. Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto x - 2 + \frac{4}{x-1}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.
5	a) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an.
7	b) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte von G_f . [zur Kontrolle: $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$]
7	c) Berechnen Sie $f(-4)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(6)$. Zeichnen Sie den Graphen G_f sowie die Asymptoten im Bereich $-4 \leq x \leq 6$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse.
6	d) Zeigen Sie, dass die Gerade g mit der Gleichung $y = -3x + 10$ Tangente an G_f ist, und geben Sie die Koordinaten des Berührungspunktes P an. [Teilergebnis: $x_P = 2$]
7	e) G_f , die Gerade g aus Teilaufgabe 1d und die Gerade $x = 3$ begrenzen ein endliches Flächenstück vom Inhalt A . Berechnen Sie A .
	2. Gegeben ist die Funktion $v : t \mapsto v(t) = 5 \cdot (1 - e^{-t})$ mit $t \geq 0$.
5	a) Der Graph dieser Funktion soll skizziert werden. Entwickeln Sie den Graphen von v , indem Sie in einem gemeinsamen Koordinatensystem der Reihe nach die Graphen der folgenden Funktionen für $t \geq 0$ skizzieren: i) $t \mapsto e^{-t}$ ii) $t \mapsto -e^{-t}$ iii) $t \mapsto -e^{-t} + 1$ iv) $t \mapsto v(t)$
3	b) In einem Versuch wird die Geschwindigkeit eines Körpers im durch Reibung gebremsten freien Fall untersucht. Die Funktion v beschreibt näherungsweise die Maßzahl der Geschwindigkeit des verwendeten Körpers in Abhängigkeit von der Maßzahl der Zeit t . Deuten Sie den Graphen von v in diesem Anwendungsbezug. Gehen Sie insbesondere auf das Verhalten für $t \rightarrow \infty$ ein.
40	

BE	II.	
	Gegeben ist die Schar von Funktionen	
	$f_a : x \mapsto e^x(x - a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ und Definitionsmenge $D_a = \mathbb{R}$.	
	Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.	
3	1.	a) Berechnen Sie die Schnittpunkte von G_a mit den Koordinatenachsen und bestimmen Sie das Verhalten von f_a für $x \rightarrow +\infty$.
11		b) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunktes von G_a . Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_a und geben Sie die Lage des Wendepunktes an. [zur Kontrolle: $f'_a(x) = e^x(x - a + 1)$]
4		c) Zeigen Sie, dass der Graph G_1 in ganz $\mathbb{R}$ oberhalb von G_2 verläuft.
9		d) Berechnen Sie $f_1(-3)$ und $f_1(2)$. Zeichnen Sie nun die Graphen G_1 und G_2 unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $-3 \leq x \leq 2$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.
2	2.	a) Zeigen Sie, dass f_{a+1} für $x \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f_a ist.
4		b) Der Graph G_1 , die x-Achse und die y-Achse schließen im 4. Quadranten ein endliches Flächenstück vom Inhalt A ein. Berechnen Sie A.
4		c) Der Flächeninhalt A aus Teilaufgabe 2b lässt sich durch den Flächeninhalt eines geeigneten Viertelkreises abschätzen. Um wie viel Prozent (auf eine Dezimale genau) weicht dieser Näherungswert vom exakten Wert ab?
3		d) Beschreiben Sie, welche geometrische Bedeutung der folgende Ausdruck besitzt:
		$\int_{-3}^1 f_1(x) dx - \int_{-3}^2 f_2(x) dx$
40		

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

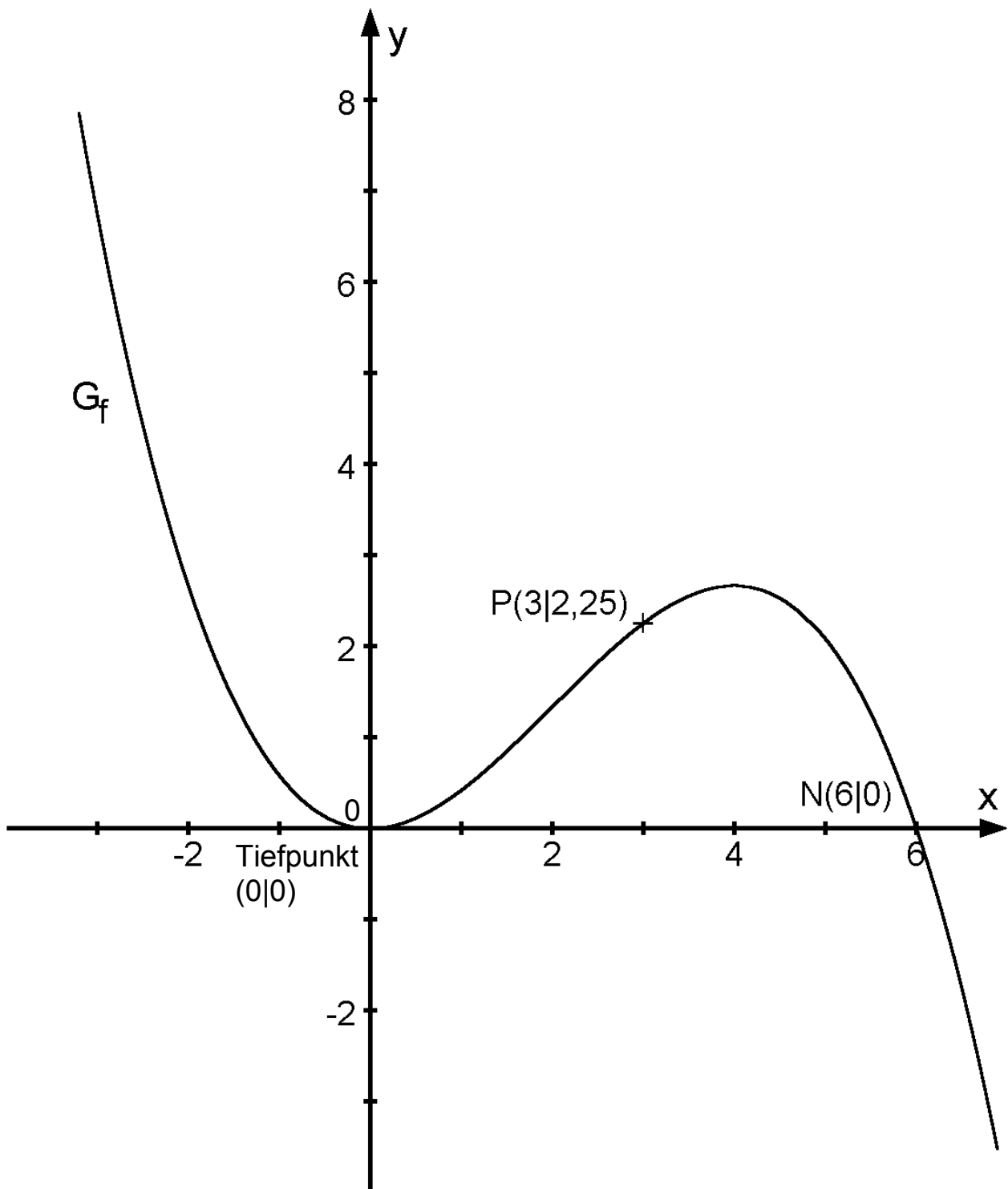
BE	I.
	Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto e^{1-x^2}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.
4	1. a) Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten von G_f und untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs.
9	b) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunktes sowie die Lage der Wendepunkte von G_f .
4	c) Berechnen Sie $f(1)$ und $f(2)$. Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-2 \leq x \leq 2$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse (Längeneinheit 2 cm).
	2. Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion $h : x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ mit $D_h = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_h bezeichnet.
8	a) Geben Sie die Wertemenge von h an und bestimmen Sie die Schnittpunkte von G_f und G_h . Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_h im Bereich $-1,5 \leq x \leq 1,5$ in das obige Koordinatensystem ein.
4	b) Ermitteln Sie den Inhalt der von den Graphen G_f und G_h eingeschlossenen Fläche näherungsweise, indem Sie den Flächeninhalt eines geeigneten Drachenvierecks berechnen. Zeichnen Sie das verwendete Drachenviereck in das oben verwendete Koordinatensystem ein.
5	c) Bestimmen Sie für die quadratische Funktion $p : x \mapsto ax^2 + bx + c$ mit $D_p = \mathbb{R}$ die Parameter a , b und c so, dass der Graph von p im Punkt $S(0 e)$ seinen Scheitel hat und durch die Punkte $A(-1 1)$ und $B(1 1)$ verläuft. [Ergebnis: $p(x) = (1 - e)x^2 + e$]
6	d) Der Graph der quadratischen Funktion $q : x \mapsto \left(1 - \frac{1}{e}\right)x^2 + \frac{1}{e}$ mit $D_q = \mathbb{R}$ hat seinen Scheitel im Punkt $T\left(0 \frac{1}{e}\right)$ und verläuft durch die Punkte $A(-1 1)$ und $B(1 1)$ (Nachweis nicht verlangt). Berechnen Sie nun näherungsweise den Inhalt der von den Graphen G_f und G_h eingeschlossenen Fläche, indem Sie die Funktionen p und q als Näherungen für die Funktionen f und h verwenden.
40	

BE	II.	
	Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.	
7	a) Bestimmen Sie mit Hilfe der in der Abbildung angegebenen Punkte von G_f die Funktionsgleichung von f . [Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2$]	
9	b) Berechnen Sie die Lage des Hochpunktes H sowie des Wendepunktes W von G_f . Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Wendetangente von G_f mit der x -Achse. [Ergebnisse: $H(4 \frac{8}{3}), W(2 \frac{4}{3}), S(\frac{2}{3} 0)$]	
7	c) Bestimmen Sie $\int_0^2 f(x) dx$. Der Koordinatenursprung und die Punkte S und W bilden ein Dreieck, das durch G_f geteilt wird. Zeichnen Sie dieses Dreieck in die Abbildung ein und berechnen Sie, in welchem Verhältnis der Graph G_f die Dreiecksfläche teilt.	
	Betrachtet wird nun die Funktion $F: x \mapsto \int_2^x f(t) dt$ mit $D_F = \mathbb{R}$.	
6	d) Geben Sie ohne Rechnung $F(0)$ und $F(2)$ an (kurze Begründung). Bestimmen Sie mit Hilfe einer Vorzeichenbetrachtung zu f das Monotonieverhalten von F . Welche Besonderheit des Graphen von F liegt an der Stelle $x = 0$ vor?	
3	e) Skizzieren Sie unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse den Graphen von F in das gegebene Koordinatensystem in der Abbildung. (Die Berechnung weiterer Funktionswerte ist nicht verlangt.)	
	Schließlich wird noch die Funktion $g: x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ mit maximaler Definitionsmenge D_g untersucht. Der Graph von g wird mit G_g bezeichnet.	
5	f) Geben Sie D_g an und untersuchen Sie das Verhalten von g an den Rändern des Definitionsbereichs.	
3	g) Untersuchen Sie G_g auf Extrempunkte; geben Sie gegebenenfalls deren Art und Lage an.	
40		

Zu Abituraufgabe GM1.II

Die Angabe ist mit abzugeben.

Name:.....
(vom Prüfling einzutragen)



GM1. INFINTESIMALRECHNUNG

I.

BE	
	Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen G_f der Funktion $f : x \mapsto 2 \cdot \frac{e^x - 4}{e^x + 4}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.
4	1. a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S von G_f mit der y-Achse. Bestimmen Sie rechnerisch das Verhalten von f für $x \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow +\infty$. (Hinweis: Zur Bestimmung des Grenzwerts für $x \rightarrow +\infty$ kann z. B. zunächst im Zähler und Nenner e^x ausgeklammert werden.)
5	b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_f mit Hilfe der ersten Ableitung. [Zur Kontrolle: $f'(x) = 16 \cdot \frac{e^x}{(e^x + 4)^2}$]
7	c) $W(\ln 4 0)$ ist der einzige Wendepunkt des Graphen G_f (Nachweis nicht verlangt). Zeigen Sie, dass die Gerade n mit der Gleichung $y = -x + \ln 4$ durch W verläuft und auf der Wendetangente senkrecht steht. Ergänzen Sie n in nebenstehender Abbildung. Berechnen Sie den Abstand des Ursprungs von der Geraden n.
3	2. a) Begründen Sie, dass f umkehrbar ist, und geben Sie den Definitionsbereich der Umkehrfunktion f^{-1} an.
3	b) Zeichnen Sie den Graphen $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion in die nebenstehende Abbildung ein.
4	c) Geben Sie jeweils ein Beispiel an für den Term – einer Funktion g mit $D_g = \mathbb{R}$, die wie f die Nullstelle $\ln 4$ hat, aber nicht umkehrbar ist; – einer Funktion h mit $D_h = \mathbb{R}$, die wie f die Nullstelle $\ln 4$ hat und umkehrbar ist, deren Umkehrfunktion aber in ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.
4	3. a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F : x \mapsto 4 \cdot \ln(e^x + 4) - 2x$ mit $D_F = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist.

(Fortsetzung nächste Seite)

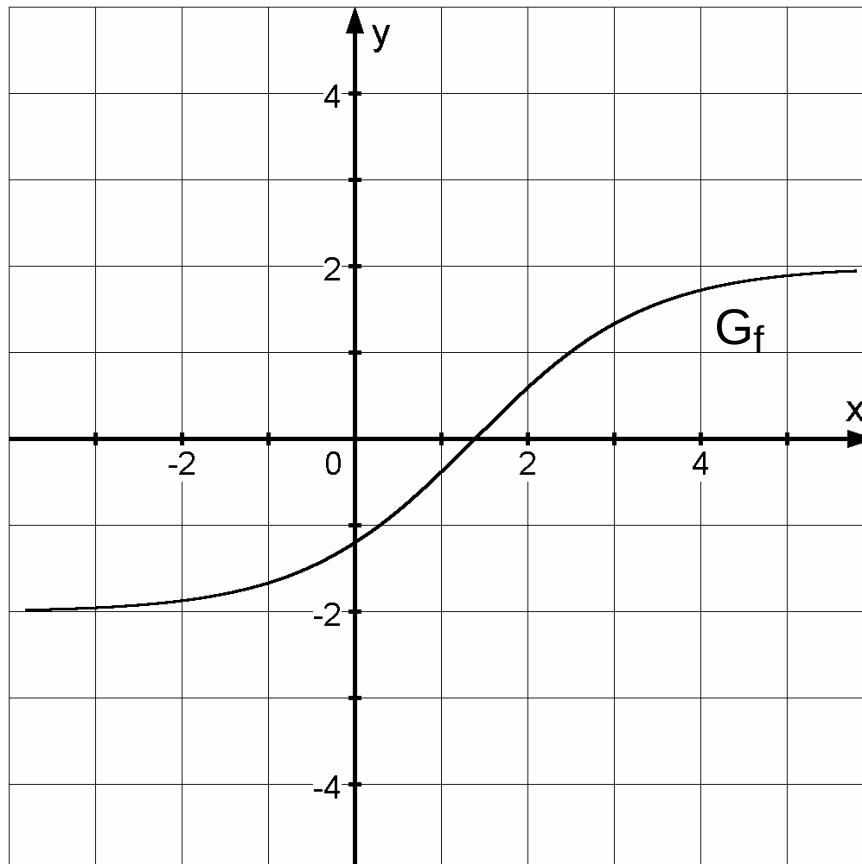
BE
6
4
40

- b) Der Schnittpunkt von G_f und $G_{f^{-1}}$ hat näherungsweise die Koordinaten $(-1,8 \mid -1,8)$. Kennzeichnen Sie in der Abbildung die Fläche, deren Inhalt durch $A = \int_{-1,8}^{\ln 4} (x - f(x)) dx$ angenähert wird.
- Berechnen Sie A.
- c) Berechnen Sie unter Verwendung des Ergebnisses für A einen Näherungswert für den Inhalt des Flächenstücks, das von G_f , $G_{f^{-1}}$ und der Geraden n eingeschlossen wird.

Zu Aufgabe GM1.I

Die Angabe ist mit abzugeben.

Name:.....
(vom Prüfling einzutragen)



BE	II.
	Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{(x+2)^2}{x^2}$ mit Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.
6	1. a) Ermitteln Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs. Untersuchen Sie G_f auf gemeinsame Punkte mit der waagerechten Asymptote.
6	b) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts E von G_f ohne Verwendung der zweiten Ableitung. [zur Kontrolle: $f'(x) = -4 \cdot \frac{x+2}{x^3}$]
3	c) Machen Sie ohne weitere Rechnung plausibel, dass G_f im zweiten Quadranten einen Wendepunkt hat.
6	d) Berechnen Sie $f(-0,75)$, $f(1)$, $f(2)$ und $f(6)$. Zeichnen Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse. Berücksichtigen Sie dabei, dass der einzige Wendepunkt von G_f der Punkt $W\left(-3 \mid \frac{1}{9}\right)$ ist (Nachweis nicht erforderlich).
9	e) Der Extrempunkt E und der Punkt $P(-1 \mid y_p)$ des Graphen G_f legen die Strecke $[EP]$ fest. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die diese Strecke mit G_f einschließt. (Hinweis: Formen Sie zur Bestimmung einer Stammfunktion von f den Funktionsterm in eine Summe um.)
	2. Gegeben ist nun zusätzlich die Geradenschar $g_a : x \mapsto ax - 2a + 4$ mit $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$.
4	a) Zeigen Sie, dass alle Schargeraden durch den Punkt $Q(2 \mid 4)$ verlaufen. Bestimmen Sie den Wert von a, für den die Gerade g_a Tangente an G_f im Punkt Q ist.
6	b) Wie viele Geraden der Schar haben mit G_f genau zwei Punkte gemeinsam? (Überlegung am Graphen genügt.) Beschreiben Sie jeweils die Lage dieser Geraden und zeichnen Sie die Geraden in das Koordinatensystem von Aufgabe 1d ein.
40	

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

BE	I.
	Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto 1 - (\ln x)^2$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^+$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.
4	1. a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f und ermitteln Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs.
7	b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_f und bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts E von G_f . Geben Sie die Wertemenge W_f von f an. [Teilergebnis: $E(1 1)$]
3	c) Die einzige Wendestelle von f ist $x_w = e$ (Nachweis nicht erforderlich). Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente w . [Zur Kontrolle: $y = -\frac{2}{e} \cdot x + 2$]
6	d) Berechnen Sie $f(e^{-2})$ und $f(6)$. Zeichnen Sie die Wendetangente w und den Graphen G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse im Bereich $0 < x \leq 6$.
	2. Die Funktion $F : x \mapsto -x(\ln x - 1)^2$ mit $D_F = \mathbb{R}^+$ ist Stammfunktion von f (Nachweis nicht erforderlich).
4	a) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von G_f und der x -Achse im ersten Quadranten begrenzt wird.
3	b) Begründen Sie, dass die Stammfunktion F zugleich die Integralfunktion $x \mapsto \int_e^x f(t)dt$ mit $x \in \mathbb{R}^+$ ist.
4	c) Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 0+} F(x)$. Deuten Sie dieses Ergebnis anhand des Graphen G_f geometrisch. (Hinweis: $\lim_{x \rightarrow 0+} [x(\ln x)^n] = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ darf ohne Beweis verwendet werden.)

(Fortsetzung nächste Seite)

BE
5
4
40

3. Durch zentrische Streckung von G_f mit dem Ursprung als Zentrum und dem Streckungsfaktor 2 erhält man den Graphen G_2 einer Funktion f_2 .
- a) Welche Koordinaten hat bei dieser Abbildung der Bildpunkt eines beliebigen Punktes $P(a \mid b)$ von G_f ? Zeichnen Sie G_2 und seine Wendetangente w_2 in das Koordinatensystem von Aufgabe 1d ein.
- b) Geben Sie den Funktionsterm von f_2 sowie ohne weitere Rechnung die Gleichung der Wendetangente w_2 an.

II.

Name:.....
(vom Prüfling einzutragen)

BE

1. Im Eingangsbereich eines Unternehmens soll das Firmenlogo im Boden eingelassen werden. Abb. 1 zeigt den Entwurf des Architekten nach Wahl eines geeigneten Koordinatensystems:

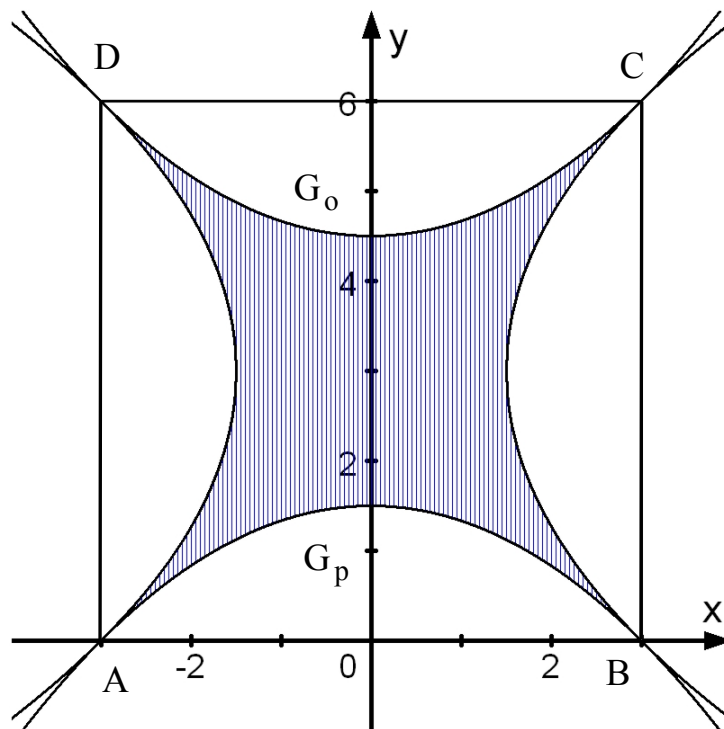


Abb. 1

Im Quadrat ABCD schneiden vier kongruente parabelförmige Bögen die in Abb. 1 schraffierte Figur aus. Die untere Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion p mit $D_p = \mathbb{R}$. G_p schneidet die x -Achse in den Punkten $A(-3|0)$ und $B(3|0)$. Die Diagonalen des Quadrats sind zugleich Tangenten an die Parabeln in den Punkten A und C bzw. B und D .

6

- a) Geben Sie die Werte der Ableitung von p in den beiden Nullstellen an und bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion p .

[Zur Kontrolle: $p(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 1,5$]

6

- b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der schraffierten Figur, wenn die Seitenlänge des Quadrats ABCD in der Eingangshalle 6 m beträgt.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

2. Die Graphen der linken, rechten und oberen Parabel in Abb. 1 gehen aus G_p durch Spiegelung und Verschiebung hervor. Daher können die zugehörigen Funktionsterme aus dem Funktionsterm von p entwickelt werden.

4 a) Erklären Sie zunächst allgemein, wie die Graphen zu den Zuordnungsvorschriften $x \mapsto p(x) + a$ bzw. $x \mapsto p(x + b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ durch Verschiebung aus G_p entstehen.

3 b) Begründen Sie ohne Rechnung, dass zum Graphen G_o der oberen Parabel in Abb. 1 die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto -p(x) + 6$ gehört.

4 c) p ist in $[0; +\infty[$ umkehrbar. Ergänzen Sie den Graphen der zugehörigen Umkehrfunktion p^{-1} in Abb. 1.

Kennzeichnen Sie in Abb. 1 den Teil der Umrandung der schraffierten Figur, zu dem die Zuordnungsvorschrift $x \mapsto p^{-1}(x + 3) + 3$ gehört.

3. Betrachtet wird nun die Funktion

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{p(x)}{x^2} = -\frac{1}{6} + \frac{1,5}{x^2}$$

mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (mit p aus Aufgabe 1). Der Graph G_f der Funktion f ist zusammen mit G_p in Abb. 2 dargestellt.

Gemäß der Definition von f stimmen die Nullstellen von f mit den Nullstellen von p überein.

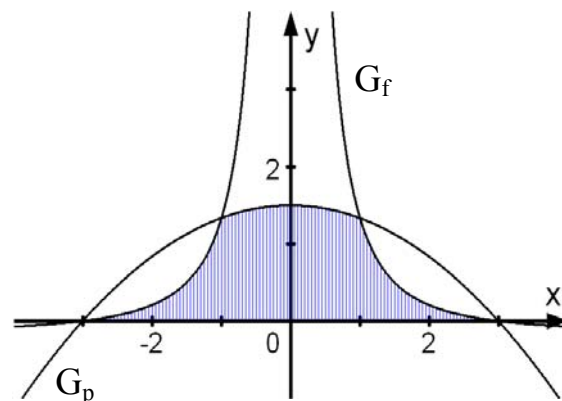


Abb. 2

2 a) Weisen Sie nach, dass G_f achsensymmetrisch ist und untersuchen Sie das Verhalten von G_f für $x \rightarrow +\infty$.

6 b) Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten an G_f in den beiden Nullstellen.

9 c) Bestätigen Sie, dass $S(1 | \frac{4}{3})$ ein weiterer Schnittpunkt von G_f und G_p ist. Berechnen Sie den Flächeninhalt des in Abb. 2 schraffierten Flächenstücks, das von G_f , G_p und der x -Achse begrenzt wird.

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

BE	I.
	Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen G_f einer rationalen Funktion f der Form $f(x) = \frac{x+a}{bx}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2	a) Einziger Schnittpunkt von G_f mit der x-Achse ist $A(-1 0)$, außerdem verläuft G_f durch den Punkt $B(1 1)$. Bestimmen Sie den Funktionsterm von f. [Ergebnis: $f(x) = \frac{x+1}{2x}$] Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion $g: x \mapsto \ln f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2x}\right)$ mit maximalem Definitionsbereich D_g. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.
7	b) Begründen Sie anhand des Verlaufs von G_f, dass gilt: $D_g = \mathbb{R} \setminus [-1;0]$. Untersuchen Sie das Verhalten von G_g an den Rändern von D_g. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_g an.
7	c) Ermitteln Sie die Nullstelle von g und untersuchen Sie mit Hilfe der ersten Ableitung das Monotonieverhalten von g. [Zur Kontrolle: $g'(x) = -\frac{1}{x(x+1)}$]
9	d) Bestimmen Sie die Stelle x_0, an der die Funktionen f und g in der ersten Ableitung übereinstimmen. Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an G_f in $P(x_0 f(x_0))$ sowie die Gleichung der Tangente an G_g in $Q(x_0 g(x_0))$. Berechnen Sie die Nullstelle der Tangente in P. [Ergebnis für die Gleichung der Tangente in P: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$]
7	e) Berechnen Sie $g(-4)$, $g(-2)$, $g(0,1)$ und $g(4)$. Zeichnen Sie den Graphen G_g sowie seine Asymptoten unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in die nebenstehende Abbildung ein. Tragen Sie auch die Tangenten in P und Q ein.

(Fortsetzung nächste Seite)

BE

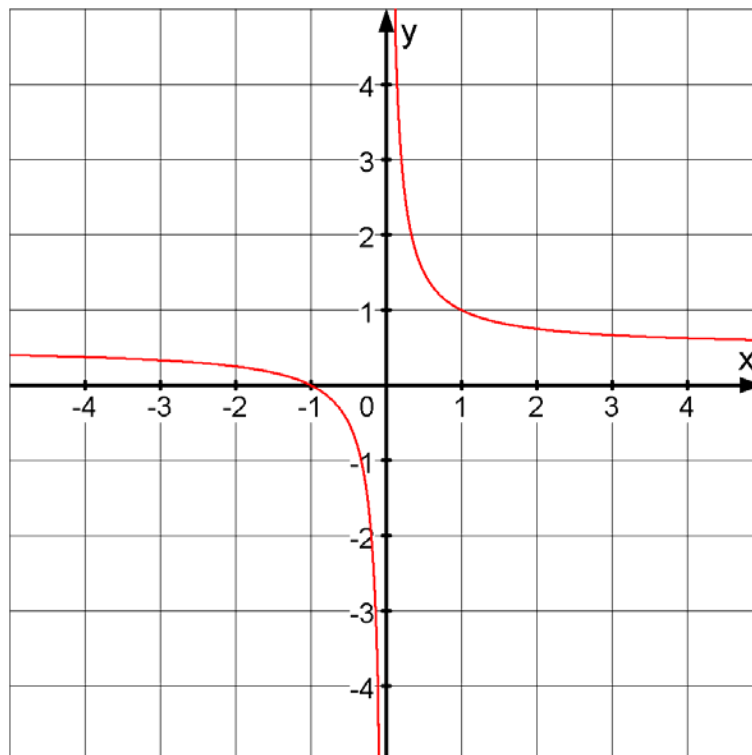
8

Die Funktion $G : x \mapsto x \cdot g(x) + \ln(x + 1)$ ist für $x > 0$ eine Stammfunktion von g (Nachweis nicht erforderlich).

f) Die Tangenten in P und Q schließen mit den Geraden $x = 1$ und $x = 3$ ein Parallelogramm ein. Der Graph von g teilt dieses Parallelogramm in zwei Teilflächen.

Wie viel Prozent der Parallelogrammfläche nimmt die Teilfläche unterhalb von G_g ein?

40

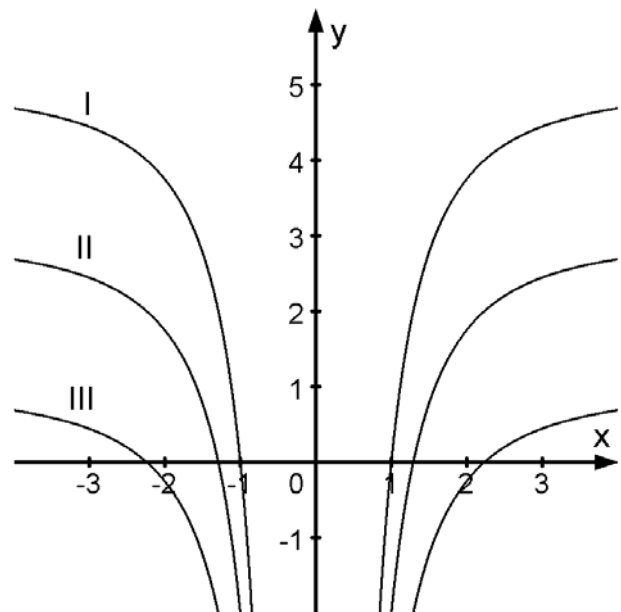


BE

II.

Gegeben ist die Schar von Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{ax^2 - 5}{x^2}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und Definitionsbereich $D_a = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

- 3 1. a) Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten von G_a und die zwei Nullstellen von f_a . [Teilergebnis: $x_1 = \sqrt{\frac{5}{a}}$]
- 3 b) Begründen Sie, dass $y = a$ Asymptote von G_a ist. Untersuchen Sie das Verhalten von f_a an der Definitionslücke.
- 5 c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von f_a . [Zur Kontrolle: $f_a'(x) = \frac{10}{x^3}$]
- 5 d) Die Abbildung zeigt drei Graphen der Schar zu *ganzzahligen* Parameterwerten a . Geben Sie an, zu welchem a die Graphen I, II und III jeweils gehören, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



(Fortsetzung nächste Seite)

- 2 a) Ermitteln Sie, für welche Parameterwerte a die positive Nullstelle von f_a kleiner als 2,5 ist.

Für diese Parameterwerte a schließen der Graph G_a , die Koordinatenachsen, die Asymptote $y = a$ und die Gerade $x = 2,5$ im ersten Quadranten eine Fläche mit Inhalt A_a ein.

- 3 b) Markieren Sie diese Fläche für einen der Graphen in der Abbildung von Aufgabe 1d. Begründen Sie, dass für den Flächeninhalt A_a gilt:

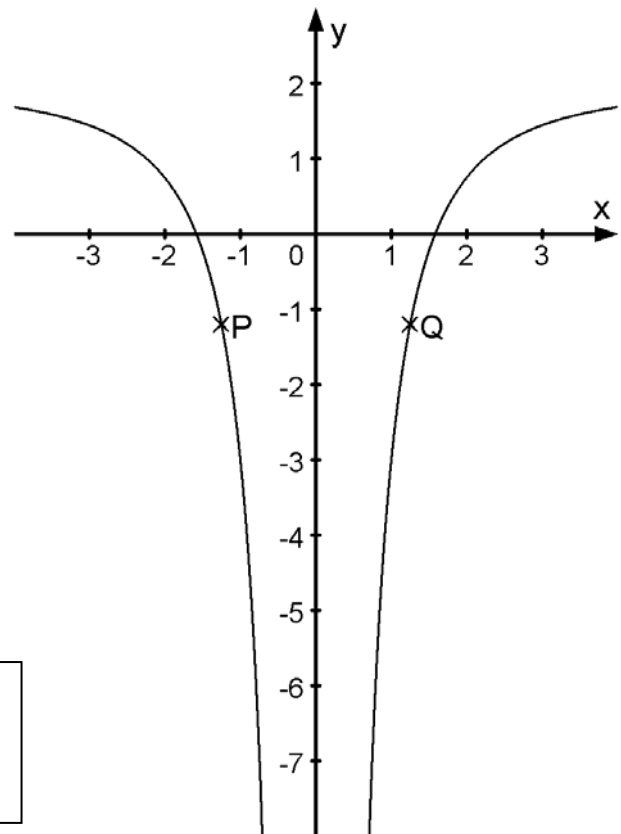
$$A_a = 2,5a - \int_{\sqrt{\frac{5}{a}}}^{2,5} f_a(x) dx.$$

- 6 c) Zeigen Sie: $A_a = 2\sqrt{5a} - 2$

(Hinweis: Für die Integration ist es hilfreich, den Term der Funktion f_a als Differenz darzustellen.)

- 4 d) Geben Sie ein Beispiel für zwei Parameterwerte a_1 und a_2 an, so dass sich die Flächeninhalte A_{a_1} und A_{a_2} um $2\sqrt{5}$ unterscheiden.

- 9 3. Nun sei $a = 2$. Die nebenstehende Abbildung zeigt den zugehörigen Graphen G_2 . Die Tangenten an G_2 in den Kurvenpunkten $P(-1,25 | -1,2)$ und $Q(1,25 | -1,2)$ schließen mit der Asymptote $y = 2$ ein Dreieck ein. Skizzieren Sie das Dreieck in die nebenstehende Abbildung und berechnen Sie seinen exakten Flächeninhalt.



Name:.....
(vom Prüfling einzutragen)

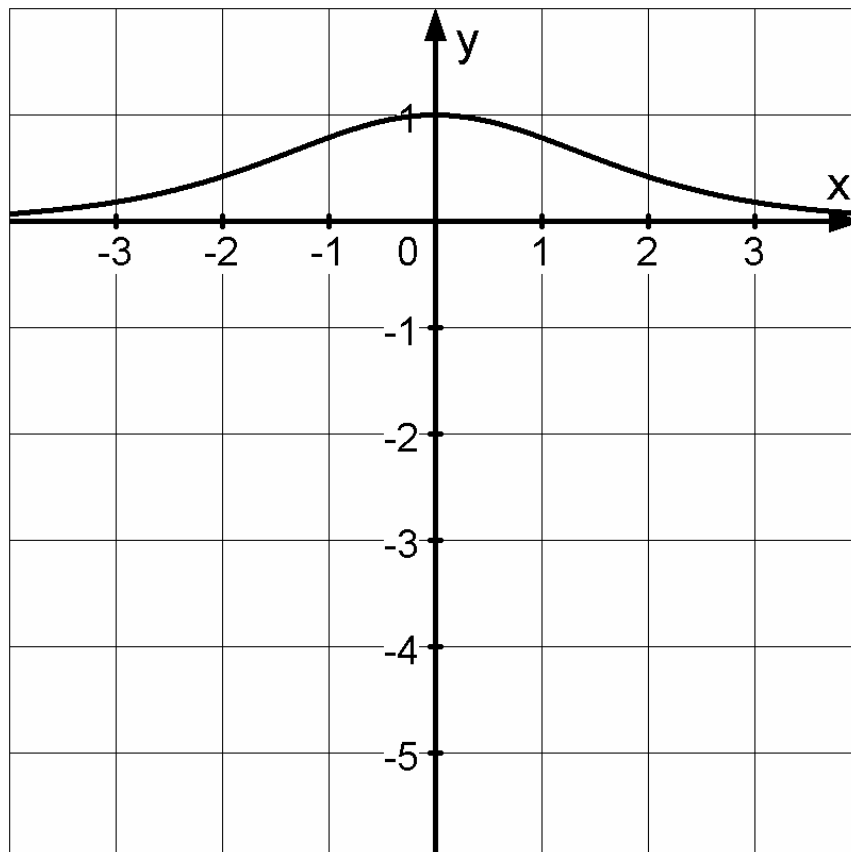
GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

Name: _____
(vom Prüfling einzutragen)

I.

BE

1. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der Funktion $f : x \mapsto \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$.



- 5 a) Begründen Sie, dass G_f stets oberhalb der x-Achse verläuft und berechnen Sie den Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse. Weisen Sie nach, dass für $x \rightarrow \pm\infty$ die Gerade $y = 0$ Asymptote von G_f ist.
- 4 b) Erklären Sie, wie man mit Hilfe des Graphen G_f ohne Berechnung von f' näherungsweise Werte von f' an einzelnen Stellen ermitteln kann. Bestimmen Sie auf die von Ihnen beschriebene Weise einen Näherungswert für $f'(1)$ auf eine Dezimale gerundet.
- 3 c) Die Funktion F mit $D_F = \mathbb{R}$ hat die Form $F(x) = \frac{c}{e^x + 1}$ und ist eine Stammfunktion von f . Bestimmen Sie die Konstante c .

[Zur Kontrolle: $F(x) = \frac{-4}{e^x + 1}$]

(Fortsetzung nächste Seite)

- 6 d) Bestimmen Sie $F(0)$ und $F'(0)$ sowie das Verhalten von F an den Rändern von D_F . Begründen Sie, dass F streng monoton zunehmend in D_F ist.
- 4 e) Tragen Sie die Tangente an den Graphen von F im Punkt $P(0 | F(0))$ in nebenstehendes Koordinatensystem ein und skizzieren Sie anschließend den Graphen von F unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in diese Abbildung.
- 6 f) Der Graph G_f , die x -Achse sowie die Geraden $x = -u$ und $x = u$ ($u > 0$) schließen ein Flächenstück vom Inhalt $A(u)$ ein. Bestimmen Sie $\lim_{u \rightarrow +\infty} A(u)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

2. Folgende Tabelle gibt für ausgewählte Jahre im Zeitraum von 1991 bis 1999 die Anzahl der Mobilfunkverträge in Deutschland jeweils zum Jahresende an.

Jahr	1991	1993	1995	1997	1999
Anzahl in Mio.	0,5	1,8	3,8	8,3	23,4

Die steigende Anzahl der Mobilfunkverträge lässt sich in diesem Zeitraum näherungsweise als exponentielles Wachstum auffassen und durch eine Exponentialfunktion der Form $N(x) = a \cdot e^{bx}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) beschreiben. $N(x)$ ist dabei die Zahl der Mobilfunkverträge in Millionen, x ist die seit Jahresende 1991 vergangene Zeit in Jahren. Beispielsweise ist $x = 8$ für das Ende des Jahres 1999.

- 4 a) Bestimmen Sie a und b aus den Werten für die Jahre 1991 und 1999. Runden Sie b auf zwei Dezimalen.
- [Ergebnis: $a = 0,5$; $b = 0,48$]
- 4 b) Berechnen Sie die prozentuale Abweichung des Funktionswertes $N(x)$ für das Jahresende 1995 vom tatsächlichen Wert. Welcher Funktionswert ergibt sich für das Jahresende 2007? Bewerten Sie das Ergebnis im oben genannten Anwendungszusammenhang.
- 4 c) Bei einem exponentiellen Wachstum dauert es immer gleich lang, bis sich die Funktionswerte verdoppeln. Berechnen Sie diese Verdopplungszeit im vorliegenden Fall.

BE

GM1. INFINITESIMALRECHNUNG

I.

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{x^2 - 2}{(x + 2)^2}$ mit maximalem Definitionsbereich D_f . Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

- 5 1. a) Bestimmen Sie D_f und die Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen.

Untersuchen Sie das Verhalten von f in der Umgebung der Definitionslücke.

- 4 b) Zeigen Sie, dass der Graph G_f die Gerade $y = 1$ als horizontale Asymptote besitzt und dass er sich dieser für $x \rightarrow +\infty$ von unten nähert.

- 10 c) Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts.
Untersuchen Sie G_f auf Wendepunkte.

$$[\text{zur Kontrolle: } f'(x) = 4 \cdot \frac{x + 1}{(x + 2)^3}]$$

- 6 d) Zeichnen Sie die Asymptoten sowie G_f im Bereich $-2 < x \leq 6$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und der Funktionswerte an den Stellen 0,5 und 1 (Längeneinheit 2cm).

2. Der Graph G_f , die x -Achse sowie die Geraden $x = -1$ und $x = 1$ umschließen ein endliches Flächenstück vom Inhalt A .

- 4 a) Schätzen Sie A mit Hilfe der Streifenmethode durch vier Rechtecke gleicher Breite nach oben ab (2 Dezimalen).

- 7 b) Zeigen Sie, dass $F : x \mapsto x - 4 \cdot \ln(x + 2) - \frac{2}{x + 2}$ für $x > -2$ eine Stammfunktion von f ist. Bestimmen Sie den Flächeninhalt A durch Integration (2 Dezimalen).

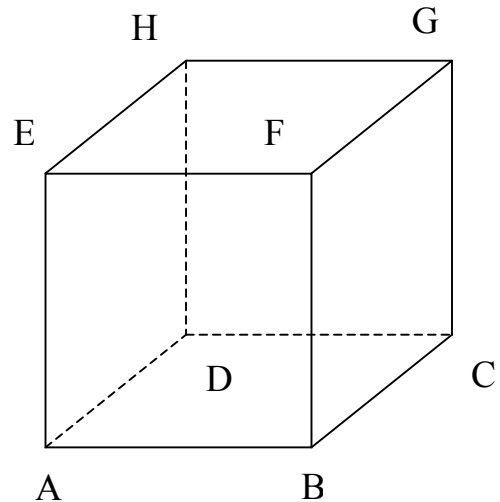
- 4 c) Besser als durch die Streifenmethode in Teilaufgabe 2a lässt sich im konkreten Fall der Flächeninhalt A durch den Flächeninhalt eines Trapezes abschätzen. Geben Sie die Eckpunkte eines geeigneten Trapezes an und berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

BE	VI.
	Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung O die Punkte $A(5 2 2)$ und $C(12 2 26)$, die Ebene $E: 4x_1 + 3x_3 - 51 = 0$ sowie die Geraden $g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \overrightarrow{OC} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2	1. a) Zeigen Sie, dass A Schnittpunkt der beiden Geraden g und h ist.
8	b) Die Geraden g und h spannen eine Ebene F auf. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Normalenform und zeigen Sie, dass F eine Lotebene zur Ebene E ist. Welche besonderen Lagen im Koordinatensystem haben die beiden Ebenen E und F? [mögliches Teilergebnis: $F: x_2 - 2 = 0$]
6	c) Weisen Sie nach, dass die Gerade g parallel zur Ebene E verläuft, und ermitteln Sie ihren Abstand von der Ebene E.
5	d) Berechnen Sie den Schnittwinkel α von g und h. Geben Sie mit Begründung die Größe des Schnittwinkels von h und E an.
6	2. a) Ermitteln Sie die Koordinaten zweier Punkte B und B' auf der Geraden g so, dass die Dreiecke ABC und ACB' gleichschenkelig mit Basis [BC] bzw. [B'C] sind. B sei derjenige der beiden Punkte mit positiver x_1-Koordinate. [Teilergebnis: $B(20 2 -18)$]
3	b) Begründen Sie ohne Rechnung, dass das Dreieck BCB' rechtwinklig ist.
3	c) M ist Mittelpunkt der Strecke [BC]. Berechnen Sie die Koordinaten von M und begründen Sie ohne Rechnung, dass [AM] eine Höhe des Dreiecks ABC ist. [Teilergebnis: $M(16 2 4)$]
7	d) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC einen Flächeninhalt von 250 Flächeneinheiten hat, und begründen Sie, dass für jede Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze $S(s_1 s_2 s_3)$ mit $s_2 \neq 2$ gilt: $V_{ABCS} = \frac{250}{3} \cdot s_2 - 2 $ Volumeneinheiten.
40	

BE

VI.

Gegeben sind im kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(2|-1|0)$, $B(6|3|-2)$ und $H(4|1|8)$. Die Punkte A, B und H sind Eckpunkte des Würfels ABCDEFGH.



- 6 1. a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene T, die durch das Dreieck ABH bestimmt ist, in Normalenform. Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat T? [mögliches Ergebnis: $x_1 - x_2 - 3 = 0$]
- 2 b) Das Dreieck ABH wird durch den Punkt G zu dem Rechteck ABGH ergänzt. Berechnen Sie die Koordinaten von G. [Ergebnis: $G(8|5|6)$]
- 5 2. Nun sollen die Koordinaten der übrigen Eckpunkte ermittelt werden.
 - 4 a) Bestimmen Sie die Länge der Diagonalen [BG] und begründen Sie, dass der Abstand des Punkts C von der Ebene T den Wert $3\sqrt{2}$ hat.
 - 4 b) Die Gerade g steht senkrecht auf der Ebene T und halbiert die Diagonale [BG]. Stellen Sie eine Gleichung von g auf.
 - 4 c) Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte C und F. Verwenden Sie dabei, dass die x_1 -Koordinate von C kleiner ist als die von F. [Ergebnis: $C(4|7|2)$, $F(10|1|2)$]
 - 2 d) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte D und E.
- 4 3. Die sechs Mittelpunkte der Seitenflächen des Würfels sind Eckpunkte eines regulären Oktaeders.
 - 4 a) Begründen Sie anhand einer Skizze, dass die Kantenlänge des Oktaeders halb so lang ist wie die Diagonale einer Würfelseitenfläche.
 - 5 b) Eine der Seitenflächen des Oktaeders liegt in der Ebene mit der Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 - 7 = 0$ (Nachweis nicht erforderlich). Bestimmen Sie den Abstand d des Oktaedermittelpunkts von einer Seitenfläche des Oktaeders. [zur Kontrolle: $d = \sqrt{3}$]
 - 2 c) Geben Sie eine Gleichung der Inkugel des Oktaeders an.
 - 6 d) Um wie viel Prozent (auf eine Dezimale genau) ist das Volumen der Inkugel des Oktaeders kleiner als das Volumen des Oktaeders?

GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

BE

V.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die vier Punkte $A(-2|8|0)$, $B(0|0|-2)$, $C(1|2|0)$ und $D(0|6|1)$ gegeben.

- 5 1. a) Weisen Sie nach, dass die vier Punkte A, B, C und D ein Trapez mit zwei gleich langen gegenüberliegenden Seiten, aber kein Parallelogramm (also ein gleichschenkliges Trapez) bilden.
- 5 b) Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalschnittpunktes M.
[Zur Kontrolle: $M(0|4|0)$]
- 4 c) Berechnen Sie den Abstand d des Punktes D von der Geraden AB.
[Zur Kontrolle: $d = 1,5\sqrt{2}$]
- 4 d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des gleichschenkligen Trapezes ABCD.
- 5 e) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, in der das Viereck ABCD liegt, in Normalenform.
[Mögliches Ergebnis: $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4 = 0$]

Das gleichschenklige Trapez ABCD bildet zusammen mit einem weiteren Punkt S eine Pyramide ABCDS. Der Punkt S liegt auf der Lotgeraden zur Ebene E durch den Punkt M und hat von der Ebene E den Abstand 15; der Koordinatenursprung und S liegen auf verschiedenen Seiten von E.

- 5 2. a) Bestimmen Sie die Koordinaten von S.
[Zur Kontrolle: $S(10|9|-10)$]
- 4 b) Zeigen Sie, dass der Punkt T $(6|7|-6)$ die Strecke [MS] innen im Verhältnis 3 : 2 teilt.
- 2 c) Bestimmen Sie eine Gleichung der zu E parallelen Ebene F, die durch den Punkt T verläuft, in Normalenform.
- 6 d) Beim Schnitt der Ebene F mit der Pyramide ABCDS entstehen zwei Teilkörper: ein Pyramidenstumpf und die zugehörige Ergänzungspyramide. Zeigen Sie, dass das Volumen der Ergänzungspyramide weniger als 7 % des Volumens der Pyramide ABCDS beträgt.

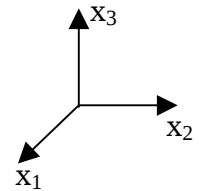
BE
4
4
4
7
6
4
5
6
40

VI.

Gegeben ist in einem kartesischen Koordinatensystem die Ebene

$E: 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 60$. Ihr Schnittpunkt mit der x_1 -Achse heißt S_1 , mit der x_2 -Achse S_2 und mit der x_3 -Achse S_3 .

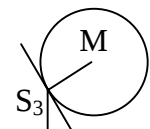
1. a) Bestimmen Sie die Koordinaten von S_1 , S_2 und S_3 und geben Sie eine Gleichung der Geraden S_1S_2 an. [Zur Kontrolle: $S_3(0 \mid 0 \mid 20)$]
- b) Vom Punkt S_3 wird ein Lot auf die Gerade S_1S_2 gefllt. Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes L . [Zur Kontrolle: $L(3 \mid 9 \mid 0)$]
- c) Legen Sie ein Koordinatensystem an und tragen Sie das Dreieck $S_1S_2S_3$ und die Gerade S_3L ein.
- d) Begründen Sie, dass L der Punkt der Geraden S_1S_2 ist, der den krziesten Abstand zum Ursprung O hat, und berechnen Sie diesen Abstand. Ermitteln Sie die Winkel im Dreieck OLS_3 auf $0,1^\circ$ genau.



2. Eine Kugel mit Radius 7 berührt die Ebene E im Punkt S_3 .

- a) Bestimmen Sie die Koordinaten der möglichen Kugelmittelpunkte.

Im Folgenden wird der Fall betrachtet, dass die Kugel zunächst den Mittelpunkt $M(2 \mid 6 \mid 23)$ hat (siehe Skizze) und dann auf der Ebene E so rollt, dass ihre Spur auf der Halbgeraden $[S_3 \mid L]$ liegt.



Skizze nicht maßstabsgetreu

- b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden m , auf der sich der Kugelmittelpunkt bewegt.

Die Kugel erreicht schließlich die x_1x_2 -Ebene und rollt auf dieser weiter.

- c) Berechnen Sie den Schnittpunkt T der Geraden m (siehe Aufgabe 2b) mit der zur x_1x_2 -Ebene parallelen Ebene, in der sich nun der Kugelmittelpunkt bewegt. [Zur Kontrolle: $T(4,4 \mid 13,2 \mid 7)$]
- d) Bestimmen Sie den letzten Berührpunkt B , den die Kugel bei dem beschriebenen Abrollvorgang mit der Ebene E hatte, und markieren Sie in der Zeichnung von Aufgabe 1c mit Farbe die Spur, welche die Kugel auf der Ebene E hinterließ.

GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

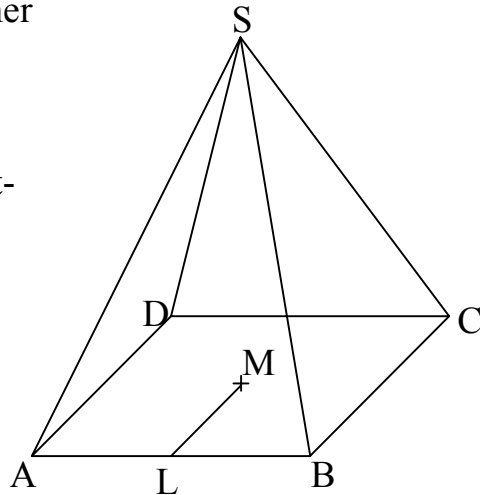
BE	
	In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-1 3 -2)$, $B(-1 -3 4)$ und $C(7 -5 2)$ gegeben.
4	1. a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig und rechtwinklig ist.
4	b) $M(3 -1 0)$ ist der Mittelpunkt der Strecke $[AC]$. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D, für den M die Strecke $[BD]$ innen im Verhältnis 2:1 teilt. [zur Kontrolle: $D(5 0 -2)$]
3	c) Besitzt das Viereck ABCD einen Umkreis? Begründen Sie Ihre Antwort.
4	d) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks ABCD.
5	2. a) Geben Sie in Normalenform eine Gleichung der Ebene E an, in der das Dreieck ABC liegt. [mögliches Ergebnis: $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 1 = 0$]
5	b) Auf der Lotgeraden zur Ebene E durch M liegen zwei Punkte S und S', die mit den Punkten A und C ein Quadrat bilden. Ermitteln Sie die Koordinaten der beiden Punkte S und S'; benennen Sie dabei den mit S, der die größere x_1 -Koordinate besitzt. [zur Kontrolle: $S(5 3 4)$]
5	c) Das Quadrat ASCS' bildet die Grundfläche einer Pyramide mit Spitze B. Berechnen Sie den Winkel, den die Kanten $[AB]$ und $[SB]$ einschließen, und begründen Sie damit, dass alle Seitenflächen gleichseitige Dreiecke sind.
6	d) Es soll ein Kantenmodell der Doppelpyramide ASCS'BD aus Draht hergestellt werden. Beim Verlöten der Drahtstücke gehen 20 % der eingesetzten Drahtlänge verloren. Die Längeneinheit sei 1 cm. Welche Länge Draht, gerundet auf mm, wird benötigt?
4	e) Berechnen Sie das Volumen der Doppelpyramide ASCS'BD.
40	

BE

VI.

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt $M(-2 | 6 | 1)$ sowie die Ebenen $E: x_3 - 1 = 0$ und $H: 8x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 5 = 0$ gegeben.

1. In Aufgabe 1 sollen die Eckpunkte einer Pyramide $ABCD S$ mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ (siehe Skizze) schrittweise bestimmt werden. Das Quadrat $ABCD$ mit Diagonalschnittpunkt M liegt in der Ebene E , die Seitenfläche ABS in der Ebene H .



- 5 a) Die Ebenen E und H schneiden sich in der Geraden g , auf der A und B liegen. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g .

$$[\text{mögliches Ergebnis: } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}]$$

- 6 b) Berechnen Sie den Fußpunkt L des Lotes von M auf die Gerade g .
[zur Kontrolle: $L(2 | 4 | 1)$]

- 7 c) Bestimmen Sie die Eckpunkte A und B des Quadrats $ABCD$. Derjenige der beiden Punkte mit der kleineren x_1 -Koordinate wird mit A bezeichnet.
[zur Kontrolle: $A(0 | 0 | 1)$]

- 4 d) Bestimmen Sie jetzt die Eckpunkte C und D des Quadrats $ABCD$.
[zur Kontrolle: $D(-8 | 4 | 1)$]

- 6 e) Die Spitze S der Pyramide liegt in der Ebene H . Der Fußpunkt des Lotes von S auf die Grundfläche ist der Punkt M . Bestimmen Sie den Punkt S .
[zur Kontrolle: $S(-2 | 6 | 9)$]

2. Der Punkt P ist Mittelpunkt der Pyramidenkante $[CS]$, der Punkt Q Mittelpunkt der Kante $[DS]$.

- 7 a) Berechnen Sie die Innenwinkel des Trapezes $ABPQ$.

- 5 b) Das Trapez $ABPQ$ zerlegt die Pyramide in zwei Teilkörper. Es wird der Teilkörper betrachtet, der die Spitze S enthält. Der Flächeninhalt des Trapezes $ABPQ$ soll als bekannt vorausgesetzt werden. Beschreiben Sie mit Worten, welche Schritte auszuführen sind, um das Volumen des betrachteten Teilkörpers zu berechnen. Der konkrete Wert des Volumens soll dabei nicht ermittelt werden.

GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

BE
5
6
5
6
3
4
4
7
40

1. In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung O sind die Punkte $A(1|-3|-3)$, $B(2|1|-2)$ und $D(5|-5|1)$ sowie die beiden folgenden Geraden gegeben:

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \overrightarrow{OD} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Die Geraden g und h legen eine Ebene H fest.

- a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene H in Normalenform.

[mögliches Ergebnis: $x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 13 = 0$]

- b) Vom Punkt B aus wird auf die Gerade g ein Lot gefällt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Lotfußpunktes C und zeigen Sie, dass BC auch eine Lotgerade zur Ebene H ist. [Teilergebnis: $C(3|-1|-4)$]

- c) Zeigen Sie, dass die Ebene $E_1: 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 1 = 0$ senkrecht auf der Ebene H steht und das Dreieck ABC enthält.

2. Das Dreieck ABC bildet die Grundfläche des dreiseitigen Prismas ABCDEF mit der Strecke [AD] als einer Seitenkante.

- a) Zeigen Sie, dass AD senkrecht auf der Ebene E_1 steht, und berechnen Sie die Koordinaten der fehlenden Punkte E und F. Fertigen Sie eine Skizze des Prismas an.

- b) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E_2 , welche die Deckfläche des Prismas enthält, in Normalenform.

- c) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig ist, und berechnen Sie das Volumen des Prismas.

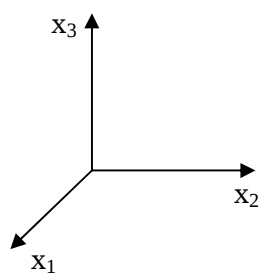
- d) Die Ebene, die durch die Punkte A, B und F bestimmt ist, zerlegt das Prisma in zwei Teilkörper. Bestimmen Sie das Verhältnis der Rauminhalte dieser Teilkörper.

- e) Geben Sie zwei Möglichkeiten an, das Prismenvolumen durch Schnitt des Prismas mit einer Ebene zu halbieren. Beschreiben Sie dazu genau die Lage der jeweiligen Schnittebene und geben Sie die Gleichungen der beiden Ebenen in Parameter- oder Normalenform an.

BE	VI.	
	In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(4 -1 4)$, $B(6 7 4)$ und $C(6 7 8)$ sowie die Ebene $E: x_3 - 6 = 0$ gegeben.	
4	1. a)	Bestätigen Sie, dass das Dreieck ABC bei B rechtwinklig ist, und beschreiben Sie, welche besondere Lage bezüglich der x_1x_2 -Ebene die beiden Katheten des Dreiecks jeweils haben.
4	b)	Das Dreieck ABC kann durch einen vierten Punkt D zu einem Rechteck ergänzt werden. Berechnen Sie die Koordinaten von D und tragen Sie das Rechteck ABCD in ein Koordinatensystem ein (vgl. Skizze).
4	c)	Begründen Sie, dass die Ebene E Symmetrieebene des Rechtecks ABCD ist.
	2.	Bei Rotation des Rechtecks ABCD um die Achse AB entsteht ein gerader Kreiszylinder als Rotationskörper.
3	a)	Begründen Sie, dass eine Mantellinie dieses Zylinders die x_1x_2 -Ebene berührt. Ergänzen Sie Ihre Zeichnung um diese Mantellinie.
3	b)	Berechnen Sie den Winkel, den diese Mantellinie mit der x_1 -Achse einschließt.
4	c)	Bei der Rotation umkreist der Punkt C die Grundfläche G des Zylinders. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F, in der G liegt.
		[mögliches Ergebnis: $F: x_1 + 4x_2 - 34 = 0$]
4	d)	Rollt man den Zylinder auf der x_1x_2 -Ebene, so berührt die Grundfläche G diese Ebene in Punkten einer Geraden g. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g.
		[mögliches Ergebnis: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$]
5	e)	Zeigen Sie, dass die Gerade g in der x_1x_2 -Ebene durch die Gleichung $x_2 = -\frac{1}{4}x_1 + 8,5$ beschrieben wird, und berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die g mit der x_1 -Achse und der x_2 -Achse einschließt.
5	f)	Die Ebene E und der Zylinder schneiden sich in einem Rechteck R. Berechnen Sie den Flächeninhalt von R.
4	g)	S ist der Diagonalschnittpunkt des Rechtecks R. Welche besondere Lage hat S im Rechteck ABCD? Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S und beschreiben Sie Art und Lage der Kurve, auf der sich der Punkt S bei der Rotation um die Achse AB bewegt.
40		

GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

BE	
	Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(0 0 2)$, $B(0 0 8)$ und $C(0 4,8 0)$. Die Gerade g verläuft durch A und ist parallel zur x_1 -Achse.
5	1. a) Die Gerade g und der Punkt C bestimmen die Ebene E . Zeigen Sie, dass $5x_2 + 12x_3 - 24 = 0$ eine Gleichung von E ist.
3	b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebene E mit der x_1x_2 -Ebene.
5	c) Legen Sie ein Koordinatensystem an und tragen Sie die bisherigen Punkte und Geraden ein. Kennzeichnen Sie in der Zeichnung die Schnittgeraden der Ebene E mit den drei Koordinatenebenen. (Ganze Seite; Ursprung in Blattmitte)
	
5	2. a) Begründen Sie, dass die Punkte A und C mit jedem von A verschiedenen Punkt $P(x_1 0 2)$ der Geraden g ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Berechnen Sie dann den Wert $x_1 > 0$ so, dass das Dreieck zudem gleichschenkelig ist; dieses Dreieck wird mit ACD bezeichnet. [Zur Kontrolle: $D(5,2 0 2)$]
6	b) Tragen Sie in Ihre Zeichnung die Kanten der Pyramide $ABCD$ ein. Wie groß sind in diesem Körper die Höhen, die auf den Grundflächen ABD bzw. ACD senkrecht stehen? (In einem Fall ist das Maß aus der Zeichnung ohne Rechnung ersichtlich.)
	3. Durch den Punkt B verläuft parallel zur x_2 -Achse die Gerade h . Auf der Geraden h liegen die Mittelpunkte M_1 und M_2 zweier Kugeln K_1 und K_2 . Die Kugeln haben den Radius 7 ; der Punkt $Q(2 6 5)$ liegt sowohl auf K_1 als auch auf K_2 .
6	a) Berechnen Sie die Koordinaten von M_1 und M_2 . (M_2 sei der Mittelpunkt mit positiver x_2 -Koordinate.) [Ergebnis: $M_1(0 0 8)$, $M_2(0 12 8)$]

(Fortsetzung nächste Seite)

BE	
6	b) Die beiden Kugeln schneiden sich in einem Kreis. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene, in der dieser Schnittkreis liegt, sowie den Mittelpunkt und den Radius dieses Kreises.
4	c) Eine weitere Kugel K_3 mit Mittelpunkt M_1 hat den Radius R . Für welche Werte von R hat diese Kugel einen Schnittkreis mit K_2 ? Erläutern Sie Ihre Lösung.
40	

BE

VI.

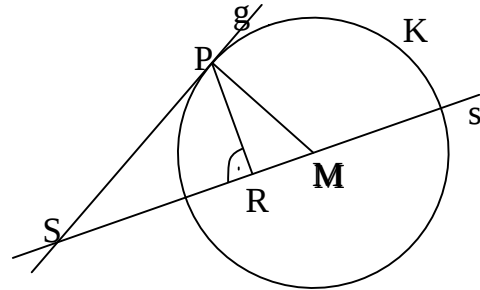
Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem der Punkt $P(-3|0|4)$, die Ebene $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 7 = 0$ und die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- 3 1. a) Zeigen Sie, dass der Punkt P auf der Geraden g, aber nicht in der Ebene E liegt.
- 4 b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S der Geraden g mit der Ebene E. [Ergebnis: $S(-6|3|1)$]
- 6 c) Zeigen Sie, dass der Punkt $R(-5|-1|2)$ Fußpunkt des Lots von P auf die Ebene E ist, und bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P', den man durch Spiegelung des Punktes P an der Ebene E erhält.
- 4 d) Ermitteln Sie den Flächeninhalt A des Dreiecks SPP'.
- 4 2. Die Ebene $F: x_1 - x_3 + 7 = 0$ enthält die Gerade g (Nachweis nicht erforderlich). Bestimmen Sie eine Gleichung für die Schnittgerade s der beiden Ebenen E und F.

[mögliches Ergebnis: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$]

3. Der Punkt M auf der Geraden s ist Mittelpunkt der Kugel K, die g in P berührt. Die nebenstehende Skizze zeigt die gegenseitige Lage der Geraden g und s sowie der Punkte S, R, P und M.

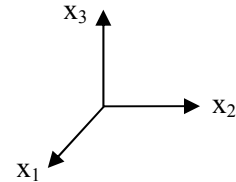


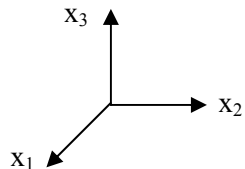
- 5 a) Ermitteln Sie die Koordinaten von M. [Ergebnis: $M(-4,5|-3|2,5)$]
- 4 b) Bestätigen Sie, dass die Ebenen E und F aufeinander senkrecht stehen, und beschreiben Sie die Lage beider Ebenen bezüglich der skizzierten Konstellation.
- 5 c) Berechnen Sie den Innenwinkel des Dreiecks SMP.
- 5 d) Es existieren zwei Wege von P nach P', die auf der Oberfläche von K und zugleich in der Ebene F verlaufen. Berechnen Sie die kürzere der beiden Weglängen.

GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

BE	
	Die Punkte $A(6 4 5)$, $B(4 4 3)$, $C(3 4 4)$ und $D(3 0 4)$ bilden eine dreiseitige Pyramide ABCD mit Spitze in D.
4	1. a) Zeigen Sie, dass die Grundfläche ABC dieser Pyramide ein rechtwinkliges Dreieck ist.
4	b) Tragen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem ein (vgl. Skizze).
5	c) Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E, in der die Grundfläche ABC der Pyramide liegt, in Normalenform auf.
4	d) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.
3	e) Ein Schatten der Pyramide in der x_1x_2 -Ebene entsteht durch Parallelprojektion in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Zeichnen Sie diesen Schatten in das Koordinatensystem ein.
4	f) Durch Verschieben der Pyramidenspitze entlang einer Geraden entstehen weitere Pyramiden mit Grundfläche ABC. Für welche Gerade erhält man dabei Pyramiden, die bei der genannten Projektion denselben Schatten wie die ursprüngliche Pyramide ABCD werfen? Begründen Sie, warum jede dieser Pyramiden den gleichen Rauminhalt besitzt.
	2. Man stelle sich die Gerade AD als Flugroute eines Passagierflugzeugs vor sowie einen Sportflieger, der entlang einer Geraden durch den Punkt $(0 -7 0)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ fliegt.
9	a) Weisen Sie nach, dass die Flugbahn des Sportfliegers die des Passagierflugzeugs kreuzt und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Flugbahnen. Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Flugbahnen?
7	b) Man stelle sich zudem den Punkt B als Gipfel eines steilen Berges vor. Wie nahe fliegt der Sportflieger am Gipfel vorbei?
40	



BE	VI.	
	Gegeben sind die Gerade g durch die Punkte $A(0 3 0)$ und $B(7 4 5)$ sowie die Gerade $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.	
4	1. a)	Zeigen Sie, dass g und h eine Ebene E aufspannen.
5	b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform. [mögliches Ergebnis: $2x_1 + x_2 - 3x_3 - 3 = 0$]	
7	c) C_1 und C_2 sind zwei Punkte der Geraden h, für die die Dreiecke ABC_1 bzw. ABC_2 bei C_1 bzw. C_2 rechtwinklig sind. Bestimmen Sie die Koordinaten beider Punkte. (Der Punkt mit ganzzahligen Koordinaten wird mit C_1 bezeichnet.) [Zur Kontrolle: $C_1(1 1 0)$]	
4	d) Tragen Sie die Geraden g und h sowie das Dreieck ABC_1 in ein Koordinatensystem ein (vgl. Skizze).	
3		e) Begründen Sie ohne Rechnung, dass der Punkt N mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC_1 ist.
5	2. Das Dreieck ABC_1 ist die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze S; M ist der Mittelpunkt der Dreiecksseite $[AC_1]$.	
8	a) Für S gilt: Die Strecke $[MS]$ steht senkrecht auf der x_1x_2-Ebene und hat die Länge 4, die x_3-Koordinate von S ist positiv. Bestimmen Sie die Koordinaten von S und zeichnen Sie M und die Pyramide in die Zeichnung von Teilaufgabe 1d ein. [Zur Kontrolle: $S(0,5 2 4)$]	
4	b) Begründen Sie, dass das Dreieck C_1AS achsensymmetrisch ist, und berechnen Sie die Innenwinkel dieses Dreiecks.	
4	c) Berechnen Sie die Höhe der Pyramide ABC_1S.	
40		

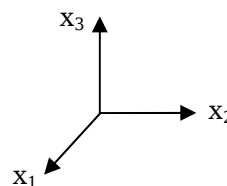
GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

BE	V.
	In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(6 2 6)$ und $B(6 6 2)$ sowie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$, gegeben.
2	1. Zeigen Sie, dass der Punkt A auf der Geraden g liegt, der Punkt B jedoch nicht.
8	2. Die Ebene E enthält den Punkt B und die Gerade g; die Ebene H enthält ebenfalls den Punkt B, steht aber auf g senkrecht. Bestimmen Sie für die beiden Ebenen je eine Gleichung in Normalenform. [mögliche Ergebnisse: $E: x_1 + x_2 + x_3 - 14 = 0$; $H: x_1 - x_2 = 0$]
6	3. a) Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt M der Geraden g mit der Ebene H die Koordinaten $(4 4 6)$ hat, und ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes C, der sich als Bildpunkt von A bei einer Spiegelung an der Ebene H ergibt. [Zur Kontrolle: $C(2 6 6)$]
4	b) Veranschaulichen Sie anhand einer Skizze die gegenseitige Lage der Geraden g, der Punkte A, B, C und M sowie der Schnittgeraden s von E und H. Wählen Sie dazu die Ebene E als Zeichenebene.
	4. Das Dreieck ABC ist Grundfläche einer Pyramide mit Spitze S.
4	a) S liegt auf dem Lot zur Ebene E durch den Punkt B sowie auf der x_3 -Achse. Bestimmen Sie die Koordinaten von S. [Zur Kontrolle: $S(0 0 -4)$]
6	b) Bestimmen Sie das Volumen V der Pyramide ABCS.
3	c) Eine zweite Pyramide mit derselben Grundfläche ABC, aber anderer Spitze S^* , besitzt den gleichen Rauminhalt V. Beschreiben Sie die möglichen Lagen von S^* in Worten (keine Rechnung nötig).
	5. Die dreieckige Seitenfläche ACS der Pyramide wird nun so weit um die Achse g gedreht, bis der gedrehte Punkt S des Dreiecks in der Ebene E zum Liegen kommt (zwei Möglichkeiten).
3	a) Begründen Sie, dass der Kreisbogen, auf dem sich S dabei bewegt, in der Ebene H liegt.
4	b) Bestimmen Sie die beiden Drehwinkel.
40	

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(3|-2|3)$, $B(3|2|3)$, $C(6|2|7)$ und $D(6|-2|7)$ sowie

die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gegeben.

- 6 1. a) Bestimmen Sie eine Normalenform der Ebene H, die durch die Punkte A, B und C festgelegt wird. Beschreiben Sie die Lage von H im Koordinatensystem. [mögliches Ergebnis: $H: 4x_1 - 3x_3 - 3 = 0$]
- 5 b) Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein ebenes Rechteck mit Flächeninhalt 20 ist.
- 6 c) Berechnen Sie den Schnittpunkt E der Geraden g mit der Ebene H. Zeigen Sie, dass E auf der Halbgeraden $[AB$, aber nicht auf der Strecke $[AB]$ liegt. [Ergebnis: $E(3|6|3)$]
- 3 d) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes $F \in [BA$ so, dass das Viereck ECDF ein achsensymmetrisches Trapez ist.
- 6 e) Bestimmen Sie die Innenwinkel dieses Trapezes und zeigen Sie, dass es den Flächeninhalt 40 hat.
2. Der Schnittpunkt S der Geraden g mit der x_1x_3 -Ebene ist die Spitze einer Pyramide mit dem Trapez ECDF als Grundfläche.
- 6 a) Bestimmen Sie das Volumen dieser Pyramide. [Teilergebnis: $S(6|0|12)$]
- 4 b) Zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem (vgl. Skizze) ein.
(Platzbedarf: ganze Seite;
Ursprung genau in Blattmitte)
- 4 c) Begründen Sie, dass die Pyramide bei Spiegelung an einer geeigneten Ebene in sich abgebildet wird, und geben Sie eine Gleichung dieser Symmetrieebene in Normalenform an.



GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

BE

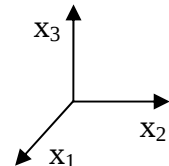
In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(8|2|0)$, $B(8|3|2)$, $C(8|-3|2)$ und $D(8|-2|0)$ sowie der Punkt $B'(0|3|2)$ gegeben.

- 5 1. a) Die Punkte A, B und B' spannen eine Ebene E auf. Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Normalenform.

[mögliches Ergebnis: $E: 2x_2 - x_3 - 4 = 0$]

- 8 b) Begründen Sie, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist, und tragen Sie es in ein Koordinatensystem (vgl. Skizze) ein.

Welche Symmetrieeigenschaft und welche besondere Lage im Koordinatensystem hat das Trapez?



- 5 c) Der Punkt A' ist der Schnittpunkt der Ebene E mit der x_2 -Achse. Berechnen Sie die Koordinaten von A'. Weisen Sie nach, dass das Dreieck DAA' rechtwinklig ist, und bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D' so, dass das Viereck DAA'D' ein Rechteck ist.

[Teilergebnis: $A'(0|2|0)$]

- 3 d) Der Punkt C' entsteht durch Spiegelung des Punktes B' an der x_1x_3 -Ebene. Geben Sie die Koordinaten von C' an und zeichnen Sie das Prisma ABCDA'B'C'D' in die Zeichnung von Teilaufgabe 1b ein.

2. Beim Prisma ABCDA'B'C'D' aus Teilaufgabe 1d handelt es sich um ein gerades Prisma (Nachweis nicht erforderlich). Dieses Prisma gibt die Form eines 16 m langen Stücks eines Kanals wieder (1 LE in der Zeichnung entspricht 2 m).

- 4 a) Berechnen Sie den Neigungswinkel α der Kanalböschung AA'B'B gegenüber der horizontalen x_1x_2 -Ebene.

- 7 b) Berechnen Sie, wie viele Kubikmeter Wasser das 16 m lange Kanalstück enthält, wenn der Kanal bis oben gefüllt ist.

[Ergebnis: 640 m^3]

- 8 c) Während einer Hitzeperiode führt das 16 m lange Kanalstück nur noch 45 % der in Teilaufgabe 2b bestimmten Wassermenge. Weisen Sie zunächst allgemein nach, dass zwischen der Wassertiefe t des Kanals und der zugehörigen Breite b der Wasseroberfläche – jeweils gemessen in m – folgender Zusammenhang besteht:
 $b = t + 8 \text{ m}$.

Berechnen Sie anschließend die Wassertiefe des Kanals in der Hitzeperiode.

BE

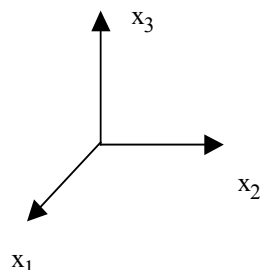
GM3. ANALYTISCHE GEOMETRIE

V.

Gegeben sind im kartesischen Koordinatensystem die Punkte $A(6|0|-2)$, $B(-2|4|-2)$ und $S(2|2|3)$ und die beiden Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Beachten Sie: $B \in g$ und $S \in h$.

- 8 1. a) Begründen Sie, dass die Gerade g und der Punkt A eindeutig eine Ebene E festlegen und ermitteln Sie eine Gleichung von E in Normalenform. Welche besondere Lage im Koordinatensystem weist diese Ebene auf? [mögliches Ergebnis: $E: x_3 + 2 = 0$]
 - 4 b) Weisen Sie nach, dass h parallel zu E liegt, und bestimmen Sie den Abstand der Geraden h von der Ebene E .
 - 4 c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Fußpunkts F des Lots von S auf die Ebene E und zeigen Sie, dass F die Strecke $[AB]$ halbiert. [zur Kontrolle: $F(2|2|-2)$]
 - 4 d) Zeichnen Sie sämtliche Punkte und Geraden in ein Koordinatensystem (vgl. Skizze) ein. (Platzbedarf: halbe Seite)
- 
- 3 2. a) Der Punkt A liegt auf einer Kugel K mit Mittelpunkt S . Ermitteln Sie den Radius der Kugel K und zeigen Sie, dass B ebenfalls auf dieser Kugel liegt.
 - 7 b) Außer dem Punkt B liegt noch ein weiterer Punkt C der Geraden g auf der Kugel K . Ermitteln Sie seine Koordinaten und ergänzen Sie Ihre Zeichnung aus Aufgabe 1d um Punkt C . [zur Kontrolle: $C(0|-2|-2)$]
 - 5 c) Zeigen Sie, dass die Gerade FC Symmetrieachse im Dreieck ABC ist.
 - 5 d) Bestimmen Sie den Rauminhalt der Pyramide $ABCS$.