Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport

Schriftliche Abiturprüfung

Mathematik

Hinweise und Beispiele zu den
zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben

2003

Impressum

Herausgeber:
Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport
Amt für Schule
Hamburger Straße 31, 22083 Hamburg

Referat:	Mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Unterricht
Referatsleitung:	Werner Renz, S 13/2
Fachreferent:	Werner Renz, S 13/21

Redaktion:	Waltraut Barthel, Gymnasium Tonndorf
	Andreas Busse, LIF, Ida-Ehre-Gesamtschule
	Manfred Dabelstein, Wirtschaftsgymnasium Harburg (H 10)
	Winfried Euba, Sankt-Ansgar-Schule
	Ralph Gloyer, Wirtschaftsgymnasium Am Lämmermarkt (H 2)
	Dr. Klaus Henning, Christianeum
	Thea Hufschmidt, Sophie-Barat-Schule
	Reinhard Janz, Technisches Gymnasium, Berufliche Schule Farmsen (G16)
	Dr. Ulrich Kotzott, Gymnasium Willhöden
	Rainer Kuske, Gymnasium Hummelsbüttel
	Dr. Wolfgang Löding, LIQ
	Gerd Muhra, Gesamtschule Mümmelmannsberg
	Kerstin Ottenberg, Gymnasium Kirchdorf/Wilhelmsburg
	Renate Otter, Peter-Petersen-Schule
	Annelies Paulitsch, LIA, Gymnasium Osdorf
	Helmut Springstein, LIF, Gymnasium Othmarschen
	Dieter Stahl, Alexander-von-Humboldt-Gymnasium
	Peter Stender, LIF, Gymnasium Oberalster

Internet: www.daten-fakten.bbs.hamburg.de

Hamburg 2003

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Sehr geehrte Kolleginnen und Kollegen,

mit der zum August 2003 in Kraft tretenden *Ausbildungs- und Prüfungsordnung zum Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife* (APOAH) werden zentrale Elemente in der schriftlichen Abiturprüfung eingeführt. Für die Abiturprüfung im Februar 2005 werden demnach im schriftlichen Abitur erstmals zentrale Aufgaben für die Fächer Deutsch, Mathematik, Englisch, Französisch, Spanisch, Latein, Gemeinschaftskunde, Biologie, Wirtschaft (am Wirtschaftsgymnasium) sowie Technik (am Technischen Gymnasium) den Schülerinnen und Schülern gestellt.

Die Abituraufgaben beziehen sich im Fach Mathematik auf Schwerpunkte, die den Schulen jeweils am Ende der Vorstufe für das Abitur dieses Jahrgangs von der Behörde für Bildung und Sport in einer eigenen Verwaltungsvorschrift zur Kenntnis gegeben werden.

In der Ihnen hier vorgelegten ergänzenden Handreichung, die die entsprechende Verwaltungsvorschrift ausführt, werden Ihnen Beispiele gezeigt, wie die Aufgaben für die schriftlichen Abiturprüfungen ab dem Jahre 2005 sowie der nachfolgenden Jahre formuliert werden.

Die Aufgabenbeispiele entsprechen in den meisten Fällen der Ihnen bekannten Hamburger *Richtlinie für die Aufgabenstellung und Bewertung der Leistungen in der Abiturprüfung*. Die Arbeitsgruppe, die die Handreichung erstellte, hat bewusst auch Gewohntes gewählt, um den Übergang zu den zentral gestellten Aufgaben in der schriftlichen Abiturprüfung zu unterstützen.

Das Neue liegt darin, dass die Aufgaben mit verbindlich definierten Arbeitsaufträgen („Operatoren“) formuliert werden und dass bei der erwarteten möglichen Schülerleistung die Kriterien und die Anforderungen für eine „gute“ und für eine „ausreichende“ Leistung beschrieben werden. Beides dient dem Ziel, mehr Verbindlichkeit und Vergleichbarkeit zu schaffen.

Hinzu kommt, dass die *Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung* (EPA) für alle Prüfungsfächer überarbeitet werden. Für Mathematik liegen sie bereits vor. Wenn alle neuen EPA als KMK-Beschlüsse vorliegen, wird die oben genannte Hamburger Richtlinie überarbeitet und den jeweiligen EPA angepasst werden. Erst dann wird es für die Aufgabenarten und die Anforderungen vermutlich Veränderungen geben.

Noch ein Wort zum Umfang der Handreichung: Art und Anzahl der Beispielaufgaben hatten sich einerseits an dem breiten Spektrum behandelter Inhalte in Schulformen mit unterschiedlichen Schwerpunktsetzungen zu orientieren. Andererseits haben sich die Autoren darum bemüht, neben Aufgaben traditioneller Art auch solche Aufgabenstellungen in die Handreichung aufzunehmen, die zu einer Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts beitragen können. Im Ergebnis sind für eine bestimmte Lerngruppe in der Regel zehn Beispielaufgaben pro Sachgebiet relevant.

In der Hoffnung, dass die vorliegende Handreichung hilfreich für Sie und dienlich für die Einführung der zentralen Elemente in die schriftliche Abiturprüfung ist, wünsche ich Ihnen und Ihren Schülerinnen und Schülern eine erfolgreiche Vorbereitung auf das Abitur.

Werner Renz

1 Regelungen für die schriftliche Abiturprüfung

Ab dem Schuljahr 2004/2005 werden die schriftlichen Abiturprüfungen im Fach Mathematik mit zentral gestellten Aufgaben durchgeführt. Dabei gelten die folgenden Regelungen:

Die Fachlehrerin, der Fachlehrer

- erhält **sieben** Aufgaben – **I.1, I.2, I.3 (Analysis), II.1, II.2** (Lineare Algebra/Analytische Geometrie) und **III.1, III.2 (Stochastik**) – vorgelegt,
- wählt aus den Bereichen **I und II** *oder* **I und III** genau **drei** Aufgaben aus beiden Sachgebieten aus.

Die Abiturientin, der Abiturient

- erhält **alle drei** Aufgaben und bearbeitet diese,
- vermerkt auf der Reinschrift, welche Aufgabe sie/er bearbeitet hat,
- ist verpflichtet, die Vollständigkeit der vorgelegten Aufgaben vor Bearbeitungsbeginn zu überprüfen (Anzahl der Blätter, Anlagen usw.).

Bearbeitungszeit:	Grundkurs:	**240** Minuten
	Leistungskurs:	**300** Minuten
Hilfsmittel:	Nicht programmierbarer Taschenrechner, Formelsammlung; Rechtschreiblexikon	

Grundlage der schriftlichen Abiturprüfung sind der Lehrplan Mathematik für die gymnasiale Oberstufe von 1990 (ohne die Ausführungen zum Verbindungssemester) und die *Richtlinie für die Aufgabenstellung und Bewertung der Leistungen in der Abiturprüfung* in der letzten Fassung.

Die wechselnden curricularen Vorgaben, Konkretisierungen und Schwerpunktsetzungen werden den Schulen jeweils im zweiten Semester der Vorstufe bekannt gegeben. Für die schriftliche Abiturprüfung 2005 können sie dem Heft *Schriftliche Abiturprüfung 2005 - Regelungen für die zentralen schriftlichen Prüfungsaufgaben* entnommen werden.

Der Unterricht in den ersten drei Semestern der Studienstufe sieht die Behandlung von genau zwei Sachgebieten vor: Analysis und Lineare Algebra/Analytische Geometrie <u>oder</u> Analysis und Stochastik. Für die zu diesen Sachgebieten genannten Schwerpunkte ist eine Unterrichtszeit von insgesamt etwa 2,5 Semestern vorgesehen.

2 Anforderungsbereiche

Die Anforderungen in der Abiturprüfung unterscheiden sich nach der Art, der Komplexität und dem Grad der Selbstständigkeit der geforderten Leistung; sie verlangen unterschiedliche Arbeitsweisen. Zur Erhöhung der Transparenz und Vergleichbarkeit lassen sich drei Anforderungsbereiche beschreiben, ohne dass in der Praxis der Aufgabenstellung die drei Anforderungsbereiche immer scharf voneinander getrennt werden können. Daher ergeben sich bei der Zuordnung der Teilaufgaben zu Anforderungsbereichen Überschneidungen.

Die zentralen Aufgaben der schriftlichen Abiturprüfung ermöglichen Leistungen in den folgenden drei Anforderungsbereichen mit einem Schwerpunkt im Anforderungsbereich II:

Anforderungsbereich I

Der Anforderungsbereich I umfasst die Wiedergabe von Sachverhalten und Kenntnissen im gelernten Zusammenhang sowie die Beschreibung und Anwendung geübter Arbeitstechniken und Verfahrensweisen in einem wiederholenden Zusammenhang.

Im Fach Mathematik kann zum Anforderungsbereich I gehören:

- Bereitstellen von Definitionen, Sätzen und einfachen Beweisen
- Beschreiben eines einfachen Sachverhalts, eines bekannten Verfahrens oder eines standardisierten Lösungsweges
- Anfertigen von Skizzen auf eine aus dem Unterricht bekannte Weise; Skizzieren der Graphen von Grundfunktionen
- Ausführen von geübten Algorithmen wie z.B. Ableiten und Integrieren in einfachen Fällen, Lösen von einfachen Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen nach eingeübten Verfahren
- Verwenden des Rechners als Werkzeug z.B. zum Zeichnen eines geeigneten Ausschnitts des Graphen einer Funktion, beim Lösen von Gleichungssystemen, beim Berechnen von Ableitungen und von Integralen
- Bestimmen der Extremwerte einer Funktion in Fällen, in denen das eingeübte Verfahren unmittelbar zum Ziel führt
- Feststellen der Lagebeziehungen zwischen Punkten, Geraden oder Ebenen mit Hilfe eines durch Übung vertrauten Verfahrens
- Bestimmen von Geraden- und Ebenengleichungen bei Vorgabe einfacher und gewohnter Bedingungen
- Darstellen statistischer Daten und Ermitteln statistischer Kenngrößen in einfachen Fällen
- Bestimmen und Berechnen von Wahrscheinlichkeiten in einfachen, vom Unterricht her vertrauten Zusammenhängen

Anforderungsbereich II

Der Anforderungsbereich II umfasst das selbstständige Auswählen, Anordnen, Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang und das selbstständige Übertragen und Anwenden des Gelernten auf vergleichbare neue Zusammenhänge und Sachverhalte.

Im Fach Mathematik kann zum Anforderungsbereich II gehören:

- Veranschaulichen und Beschreiben von Zusammenhängen bei bekannten Sachverhalten mit Hilfe von Bildern, Texten und Symbolen
- Dokumentieren eines Lösungsweges in sachgerechter mathematischer Form
- Verfassen eines mathematischen Kurzaufsatzes in bekannten Zusammenhängen
- Ausführen von Beweisen, deren Beweisstruktur aus dem Unterricht bekannt ist
- Anwenden von zentralen Begriffen in Beispielen, die in ihrer Struktur einfach sind
- Interpretieren charakteristischer Eigenschaften einer Funktion anhand ihres Graphen
- Übersetzen eines Schaubildes in einen Funktionsterm oder eines Funktionsterms in eine Skizze
- Anpassen von Funktionen an vorgegebene Bedingungen, wenn ähnliche Vorgehensweisen aus dem Unterricht bekannt sind
- Durchführen vollständiger Fallunterscheidungen in überschaubaren Situationen
- gezieltes Verwenden des Rechners bei der Lösung komplexerer Probleme

- Übersetzen einer Ausgangssituation in ein geeignetes mathematisches Modell (z.B. Koordinatensystem, Funktionsterm, Gleichungssystem, Wahrscheinlichkeitsverteilung), wenn ähnliche Modellierungen aus dem Unterricht bekannt sind
- sachgerechtes und begründetes Argumentieren bei der Darstellung eines Modellansatzes oder bei der Auswahl eines Lösungsweges
- verständiges Anwenden der Beziehung zwischen Änderungsrate und Gesamtänderung in bekannten Situationen
- analytisches Beschreiben von geometrischen Objekten, wobei die sie bestimmenden Parameter erst aus anderen Bedingungen erschlossen werden müssen
- Vergleichen und Bewerten verschiedener Lösungsansätze in einem durch Übung bekannten Zusammenhang
- Analysieren und Modellieren stochastischer Prozesse in aus dem Unterricht bekannter Weise
- Durchführen eines aus dem Unterricht bekannten Verfahrens der beurteilenden Statistik
- Beschaffen, Strukturieren, Auswählen und Auswerten von Informationen zu einer überschaubaren Problemstellung in einer im Unterricht vorbereiteten Vorgehensweise
- Präsentieren von Arbeitsergebnissen in übersichtlicher, gut strukturierter Form

Anforderungsbereich III

Der Anforderungsbereich III umfasst das zielgerichtete Verarbeiten komplexer Sachverhalte mit dem Ziel, zu selbstständigen Lösungen, Gestaltungen oder Deutungen, Folgerungen, Begründungen und Wertungen zu gelangen. Dabei wählen die Schülerinnen und Schüler aus den gelernten Arbeitstechniken und Verfahren die zur Bewältigung der Aufgabe geeigneten selbstständig aus, wenden sie in einer neuen Problemstellung an und beurteilen das eigene Vorgehen kritisch.

Im Fach Mathematik kann zum Anforderungsbereich III gehören:

- kreatives Übersetzen einer komplexeren Ausgangssituation in ein geeignetes mathematisches Modell, ohne dass dies in vergleichbaren Zusammenhängen geübt wurde
- planvolles, begründetes Nutzen und Bewerten von Informationen bei komplexeren oder offeneren Problemstellungen
- Auffinden eines Lösungsansatzes für Probleme, bei denen Kenntnisse aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik verbunden werden müssen, ohne dass dies in vergleichbaren Zusammenhängen geübt wurde
- Überprüfen und Bewerten der Vorgehensweise sowie Interpretieren und Beurteilen der Ergebnisse z.B. bei einer Modellierung oder beim Umgang mit Informationen
- Anwenden zentraler Begriffe und Vorgehensweisen in komplexeren Zusammenhängen
- Verallgemeinern eines Sachverhalts, der nur von Beispielen her bekannt ist
- Ausführen eines Beweises, zu dem eigenständige Beweisgedanken erforderlich sind

3 Liste der Operatoren

Mehr noch als bei dezentralen Aufgaben, die immer im Kontext gemeinsamer Erfahrungen der Lehrkräfte und Schüler mit vorherigen Klausuren stehen, müssen zentrale Prüfungsaufgaben für die Abiturientinnen und Abiturienten eindeutig hinsichtlich des Arbeitsauftrages und der erwarteten Leistung formuliert sein. Die in den zentralen schriftlichen Abituraufgaben verwendeten Operatoren (Arbeitsaufträge) werden in der folgenden Tabelle definiert und inhaltlich gefüllt. Entsprechende Formulierungen in den Klausuren der Studienstufe sind ein wichtiger Teil der Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler auf das Abitur.

Neben Definitionen und Beispielen enthält die Tabelle auch Zuordnungen zu den Anforderungsbereichen **I**, **II** und **III** (vgl. die *Richtlinie für die Aufgabenstellung und Bewertung der Leistungen in der Abiturprüfung*), wobei die konkrete Zuordnung auch vom Kontext der Aufgabenstellung abhängen kann und eine scharfe Trennung der Anforderungsbereiche nicht immer möglich ist.

Operatoren	Definitionen	Beispiele
Angeben, nennen **I**	Ohne nähere Erläuterungen und Begründungen, ohne Lösungsweg aufzählen	Geben Sie drei Punkte an, die in der Ebene liegen. Nennen Sie drei weitere Beispiele zu …
Begründen **II–III**	Einen angegebenen Sachverhalt auf Gesetzmäßigkeiten bzw. kausale Zusammenhänge zurückführen. Hierbei sind Regeln und mathematische Beziehungen zu nutzen.	Begründen Sie, dass die Funktion nicht mehr als drei Wendestellen aufweisen kann. Begründen Sie die Zurückweisung der Hypothese.
Berechnen **I**	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses.
Beschreiben **I–II**	Sachverhalt oder Verfahren in Textform unter Verwendung der Fachsprache in vollständigen Sätzen in eigenen Worten wiedergeben (hier sind auch Einschränkungen möglich: „Beschreiben Sie in Stichworten“)	Beschreiben Sie den Bereich möglicher Ergebnisse. Beschreiben Sie, wie sie dieses Problem lösen wollen, und führen Sie danach Ihre Lösung durch.
Bestimmen, ermitteln **II–III**	Einen möglichen Lösungsweg darstellen und das Ergebnis formulieren (die Wahl der Mittel kann unter Umständen eingeschränkt sein)	Ermitteln Sie graphisch den Schnittpunkt. Bestimmen Sie aus diesen Werten die Koordinaten der beiden Punkte.
Beurteilen **III**	Zu einem Sachverhalt ein selbstständiges Urteil unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren und begründen	Beurteilen Sie, welche der beiden vorgeschlagenen modellierenden Funktionen das ursprüngliche Problem besser darstellt.
Beweisen, widerlegen **III**	Beweisführung im mathematischen Sinne unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischer Schlüsse und Äquivalenzumformungen, ggf. unter Verwendung von Gegenbeispielen	Beweisen Sie, dass die Gerade auf sich selbst abgebildet wird.
Entscheiden **II**	Bei Alternativen sich begründet und eindeutig auf eine Möglichkeit festlegen	Entscheiden Sie, für welchen der beiden Beobachter der Aufschlagpunkt näher ist. Entscheiden Sie, welche der Ihnen bekannten Verteilungen auf die Problemstellung passt.
Erstellen **I**	Einen Sachverhalt in übersichtlicher, meist fachlich üblicher oder vorgegebener Form darstellen	Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Funktion.
Herleiten **II**	Die Entstehung oder Ableitung eines gegebenen oder beschriebenen Sachverhalts oder einer Gleichung aus anderen oder aus allgemeineren Sachverhalten darstellen	Leiten Sie die gegebene Formel für die Stammfunktion her.
Interpretieren **II–III**	Die Ergebnisse einer mathematischen Überlegung rückübersetzen auf das ursprüngliche Problem	Interpretieren Sie: Was bedeutet Ihre Lösung für die ursprüngliche Frage?
Skizzieren **I–II**	Die wesentlichen Eigenschaften eines Objektes graphisch darstellen (auch Freihandskizze möglich)	Skizzieren Sie die gegenseitige Lage der drei Körper.

Operatoren	Definitionen	Beispiele
Untersuchen **II**	Sachverhalte nach bestimmten, fachlich üblichen bzw. sinnvollen Kriterien darstellen	Untersuchen Sie die Funktion … Untersuchen Sie, ob die Verbindungskurve ohne Knick in die Geraden einmündet.
Vergleichen **II–III**	Nach vorgegebenen oder selbst gewählten Gesichtspunkten Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede ermitteln und darstellen	Vergleichen Sie die beiden Vorschläge … nach der von den Kurven eingeschlossenen Fläche.
Zeichnen, graphisch darstellen **I–II**	Eine hinreichend exakte graphische Darstellung anfertigen	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion. Stellen Sie die Punkte und Geraden im Koordinatensystem mit den gegebenen Achsen dar.
Zeigen, nachweisen **II–III**	Eine Aussage, einen Sachverhalt nach gültigen Schlussregeln, Berechnungen, Herleitungen oder logischen Begründungen bestätigen	Zeigen Sie, dass das betrachtete Viereck ein Drachenviereck ist.

4 Aufgabenbeispiele

Die folgenden Aufgaben sind Beispiele für zentrale schriftliche Abiturprüfungen im Fach Mathematik zu den oben genannten curricularen Vorgaben, Konkretisierungen und Schwerpunktsetzungen.

Außer der Aufgabenstellung enthalten die Beispiele den Erwartungshorizont, Hinweise zu den Operatoren mit Bezug zu den drei Anforderungsbereichen, Bewertungshinweise sowie Hinweise darüber, für welche Lerngruppen sie konzipiert wurden:

- Gy, GS: für Lerngruppen des allgemein bildenden Bereichs (Gymnasien und Gesamtschulen)
- TG: für Lerngruppen der Technischen Gymnasien
- WG: für Lerngruppen der Wirtschaftsgymnasien

Für die Bewertung der Gesamtleistung der schriftlichen Abiturprüfung gilt die folgende Zuordnungstabelle:

Erreichte Gesamtpunktzahl	Bewertung in Punkten
≥ 95 %	15
≥ 90 %	14
≥ 85 %	13
≥ 80 %	12
≥ 75 %	11
≥ 70 %	10
≥ 65 %	9
≥ 60 %	8
≥ 55 %	7
≥ 50 %	6
≥ 45 %	5
≥ 40 %	4
≥ 33,3 %	3
≥ 26,7 %	2
≥ 20 %	1
< 20 %	0

Bewertungskriterien für die Noten „gut“ und „ausreichend“

Die Note „gut“ (11 Punkte) kann nur erteilt werden, wenn mindestens 75% der erwarteten Gesamtleistung sowie Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht wurden.

Die Note „ausreichend“ kann nur erteilt werden, wenn mindestens 45 % der erwarteten Gesamtleistung erbracht wurden.

4.1 Grundkurs

4.1.1 Analysis Gy, GS, TG, WG

Aufgabe 1: Ganzrationale Funktionen

Diskussion einer ganzrationalen Funktion, Flächenberechnung durch Integration, Extremwertbestimmung. Die Aufgabe entspricht mit leichten Veränderungen der Abituraufgabe GK 2001/1 in Baden-Württemberg.

Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \frac{1}{12}(x^3 - 12x^2 + 36x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse, Hoch- Tief- und Wendepunkte.

Zeichnen Sie den Graphen von f für $-1 \le x \le 7$.

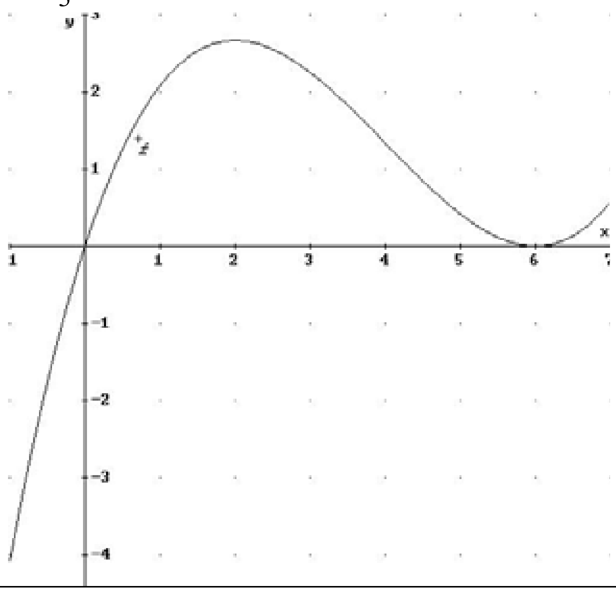
b) Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch den Hochpunkt $(2 \mid \frac{8}{3})$ bilden mit den Koordinatenachsen ein Rechteck.

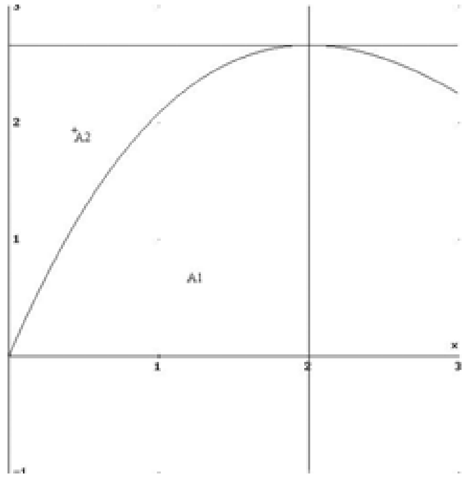
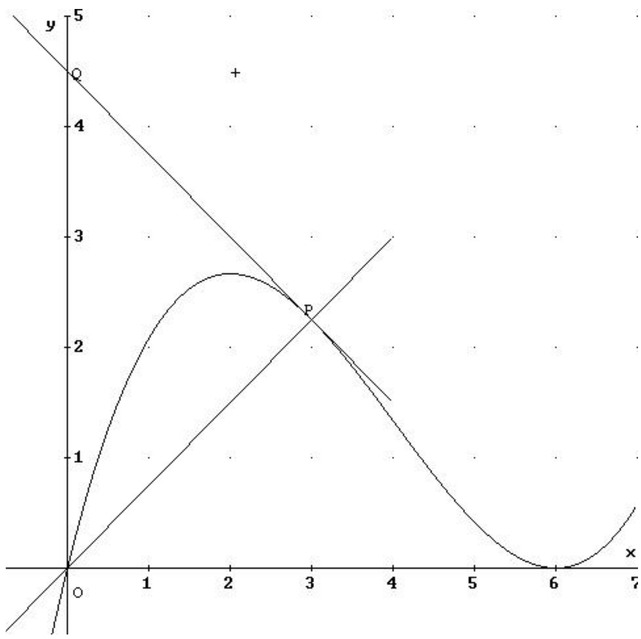
In welchem Verhältnis teilt der Graph von f die Rechteckfläche?

c) An den Graphen von f wird im Punkt $P\,(u \mid f(u))$ mit $2 < u < 6$ die Tangente t_p gelegt. Diese Tangente schneidet die y-Achse im Punkt Q. Der Ursprung O bildet mit den Punkten P und Q ein Dreieck.

Für welchen Wert von u wird der Flächeninhalt dieses Dreiecks maximal?

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Benötigt werden die Funktion und ihre Ableitungen: $f(x)=\frac{1}{12}(x^3-12x^2+36x)=\frac{1}{12}x(x-6)^2$, $f'(x)=\frac{1}{4}(x^2-8x+12)$, $f''(x)=\frac{1}{2}(x-4)$, $f'''(x)=\frac{1}{2}$. Aus der faktorisierten Form von $f(x)$ liest man die Nullstellen $x=0$ und $x=6$ direkt ab. Die beiden gemeinsamen Punkte des Graphen von f und der x-Achse sind also: (0 | 0) und (6 | 0). Die möglichen Extremstellen sind die Nullstellen der ersten Ableitung. $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(x^2-8x+12)=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 12}}{2}$, also $x_1=6$ und $x_2=2$. Einsetzen dieser Stellen in die zweite Ableitung ergibt: $f''(6)=\frac{1}{2}(6-4)=1>0$ und $f''(2)=\frac{1}{2}(2-4)=-1<0$, d. h. der Graph von f besitzt den Tiefpunkt (6 | 0) und den Hochpunkt (2 | $\frac{8}{3}$). Eine mögliche Wendestelle ist die Nullstelle der zweiten Ableitung $x=4$. Da die dritte Ableitung konstant gleich $\frac{1}{2}$ >0 ist, besitzt der Graph von f den Wendepunkt (4 | $\frac{4}{3}$). 	20	20	

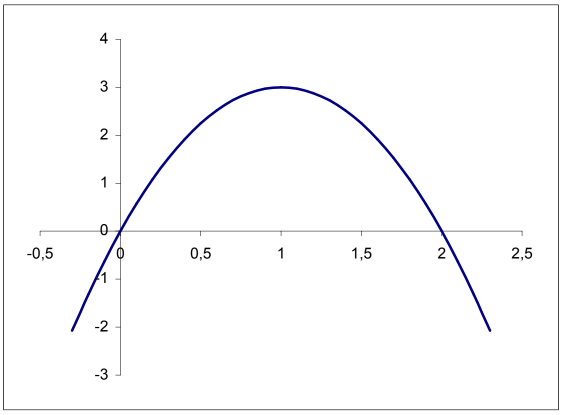
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
b)	 Das so gebildete Rechteck besitzt den Flächeninhalt $A = 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$. Der Inhalt der Fläche A_1, die vom Graphen von f, der x-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = 2$ begrenzt wird, berechnet sich durch Integration. $$A_1 = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{12}(x^3 - 12x^2 + 36x)dx = \frac{1}{12}\left[\frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 18x^2\right]_0^2 = \frac{11}{3}$$ Der Flächeninhalt A_2 beträgt dann: $A_2 = A - A_1 = \frac{5}{3}$. Die Rechteckfläche wird also vom Graphen von f geteilt im Verhältnis $A_1 : A_2 = \frac{11}{3} : \frac{5}{3} = 11 : 5$.		18	8
c)	Die Tangentengleichung für t_P lautet: $t_P(x) = f(u) + f'(u)(x-u)$.  			

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung, Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td></td><td>Die y-Koordinate des Schnittpunktes Q der Tangente mit der y-Achse ist $t_P(0)$.
$$t_P(0) = f(u) + f'(u)(-u) = \frac{1}{12}u(u^2 - 12u + 36) + \frac{1}{4}(u^2 - 8u + 12)(-u)$$
$$= -\frac{1}{6}u^3 + u^2$$
Damit ergibt sich der Punkt Q zu $(0 \mid -\frac{1}{6}u^3 + u^2)$.
Um den Flächeninhalt $F(u)$ des Dreiecks OPQ zu berechnen, wählt man z.B. als Grundseite die Strecke $\overline{OQ}$, dann ist u die Höhe des Dreiecks.
$$F(u) = \frac{1}{2}t_P(0)\cdot u = \frac{1}{2}(-\frac{1}{6}u^3 + u^2)\cdot u = -\frac{1}{12}u^4 + \frac{1}{2}u^3$$
Um die Zahl u zu ermitteln, für die der Flächeninhalt $F(u)$ am größten ist, wird F auf Extremstellen im Intervall $]2; 6[$ untersucht.
Nullsetzen der ersten Ableitung $F'(u) = -\frac{1}{3}u^3 + \frac{3}{2}u^2 = -\frac{1}{6}u^2(2u-9)$ ergibt:
$u = \frac{9}{2}$, da $2 < u < 6$ gelten soll. Einsetzen von $u = \frac{9}{2}$ in die zweite Ableitung
$F''(u) = -u^2 + 3u$ ergibt: $F''(u) = -\frac{27}{4} < 0$, also besitzt die Funktion dort das einzige relative Maximum im Intervall $]2; 6[$, das damit auch ihr absolutes Maximum ist, da auch an den Intervallrändern kein größerer Funktionswert auftritt. ($F(\frac{9}{2}) \approx 11{,}39$, $F(2) \approx 2{,}67$, $F(6) = 0$)
Der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ wird also für $u = \frac{9}{2}$ maximal.</td><td></td><td>22</td><td>12</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 2: Ganzrationale Funktionen 2 **Gy, GS, TG, WG**

Aufgabenstellung

In der nebenstehenden Abbildung ist ein Ausschnitt des Graphen der Ableitungsfunktion f' einer Menge $\mathbb{S}$ ganzrationaler Funktionen f_s dargestellt.



a) Begründen Sie mit Hilfe der Abbildung, dass die Graphen aller Funktionen der Menge $\mathbb{S}$ einen Hochpunkt, einen Tiefpunkt und einen Wendepunkt mit positiver Steigung haben.

Skizzieren Sie den möglichen Verlauf des Graphen einer Funktion aus der Menge $\mathbb{S}$ in die Abbildung.

Wie unterscheiden sich alle Funktionen der Menge $\mathbb{S}$ voneinander, die f' als Ableitungsfunktion haben?

b) Nehmen Sie an, dass für den Hochpunkt, den Tiefpunkt und den Wendepunkt einer speziellen Funktion der Menge $\mathbb{S}$ jeweils Koordinaten bekannt sind. Welchen Grad kann eine solche Funktion höchstens besitzen, wenn unter Beachtung aller verfügbaren Informationen und unter Einbeziehung obiger Abbildung die Abbildungsvorschrift eindeutig herleitbar sein soll?

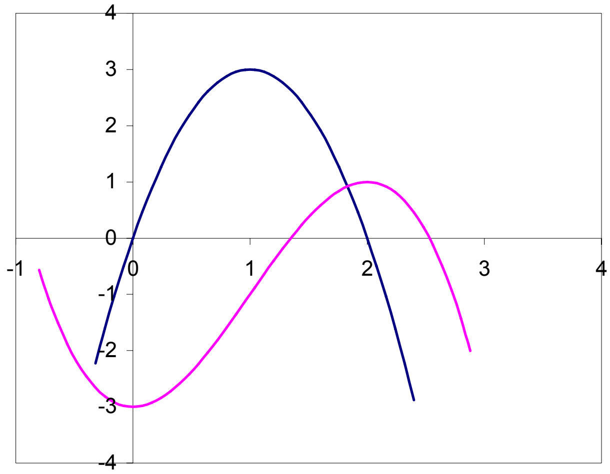
Bestimmen Sie nun die Abbildungsvorschrift einer ganzrationalen Funktion k 3. Grades, die im Punkt (0 | 1) einen Tiefpunkt und im Punkt (2 | 5) einen Hochpunkt besitzt.

[Das Ergebnis lautet: $k: x \to -x^3 + 3x^2 + 1$]

c) Es sei $g_a:\ x \to a \cdot (x-1) + 3$ eine Menge $\mathbb{G}$ linearer Funktionen. Hierdurch ist eine Menge von Geraden definiert, die den Graphen von k in mindestens einem Punkt schneiden.
Zeigen Sie, dass alle Geraden der Menge $\mathbb{G}$ mit dem Graphen von k den Punkt (1 | 3) gemeinsam haben.
In Abhängigkeit von der noch variablen Steigung a gibt es weitere gemeinsame Punkte der Graphen von k und g_a.
Ermitteln Sie diese.
Führen Sie eine geeignete Fallunterscheidung durch und interpretieren Sie die verschiedenen Situationen geometrisch.

d) Im Fall $a = 2$ schließen die Graphen von k und g_a zwei Flächenstücke ein. Zeigen Sie durch Berechnung, dass die Flächenstücke den gleichen Flächeninhalt besitzen.
Begründen Sie ohne oder auch mit Rechnung, dass für jedes a, bei dem die Graphen von k und g_a drei Schnittpunkte besitzen, die entstehenden Flächenstücke gleichen Inhalt haben.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Funktion f' besitzt an den Stellen $x = 0$ und $x = 2$ Nullstellen, an denen ein Vorzeichenwechsel stattfindet (vgl. Abbildung). Somit besitzt jede Funktion $f_{\mathbb{S}}$ der Menge $\mathbb{S}$ an diesen Stellen Extremstellen. Aufgrund des Vorzeichenwechsels von – nach + an der Stelle $x = 0$ handelt es sich an dieser Stelle um ein lokales Minimum. Aufgrund des Vorzeichenwechsels von + nach – an der Stelle $x = 2$ handelt es sich an dieser Stelle um ein lokales Maximum. An der Stelle $x = 1$ besitzt f' ein lokales Maximum mit positivem Funktionswert. Somit haben alle Funktionen f_s der Menge $\mathbb{S}$ an der Stelle $x = 1$ eine Wendestelle mit positiver Steigung. Der mögliche Verlauf des Graphen einer Funktion f_s der Menge $\mathbb{S}$ ist der folgenden Abbildung zu entnehmen.  Die Funktionen der Menge $\mathbb{S}$ unterscheiden sich durch eine additive Konstante.		20	
b)	Bekannte Informationen sind: 1. die Koordinaten des Hochpunktes $\left(x_H \; ; \; f(x_H)\right)$, 2. die Koordinaten des Tiefpunktes $\left(x_T \; ; \; f(x_T)\right)$, 3. die Koordinaten des Wendepunktes $\left(x_W \; ; \; f(x_W)\right)$. Der in der Aufgabenstellung gegebenen Abbildung sind folgende Informationen zu entnehmen: 4. $f'(0) = 0$ 6. $f'(1) = 3$ 5. $f''(1) = 0$ 7. $f'(2) = 0$ Aus diesen insgesamt 7 bekannten Informationen lässt sich die Abbildungsvorschrift einer ganzrationalen Funktion höchstens 6. Grades eindeutig bestimmen.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Der allgemeine Ansatz für eine ganzrationale Funktion 3. Grades lautet: $$k:\ x \to ax^3 + bx^2 + cx + d\ .$$ Damit gilt für die Ableitungsfunktion: $$k':\ x \to 3ax^2 + 2bx + c\ .$$ Aus den in der Aufgabenstellung vorgegebenen Eigenschaften erhält man somit folgende Gleichungen: $k(0)=1 \Rightarrow d=1$, $k'(0)=0 \Rightarrow c=0$, $k(2)=5 \Rightarrow 8a+4b+1=5$, $k'(2)=0 \Rightarrow 12a+4b=0$. Hieraus erhält man nach kurzer Rechnung $a=-1$ und $b=3$. Damit lautet die gesuchte Funktion: $k:\ x \to -x^3+3x^2+1$.	15	17	
c)	$k(1) = g_a(1) = 3$. Die Schnittstellen der Graphen von k und g_a sind die Lösungen der Gleichung $k(x) = g_a(x)$. Durch Einsetzen der Funktionsterme ergibt sich die Gleichung: $-x^3+3x^2-ax+a-2=0$ Da $x = 1$ eine Lösung der Gleichung ist, ergibt die Faktorisierung der Gleichung mittels Polynomdivision: $$-x^3+3x^2-ax+a-2=(x-1)\left(-x^2+2x-(a-2)\right).$$ Weitere Schnittstellen von k und g_a sind also die Lösungen der quadratischen Gleichung $$-x^2+2x-(a-2)=0\ .$$ Man erhält: $x=1+\sqrt{3-a} \quad \vee \quad x=1-\sqrt{3-a}$. Es sind nun folgende Fälle sinnvoll zu unterscheiden: 1. $a > 3$: In diesem Fall gibt es außer $x = 1$ keine weiteren Schnittstellen der Graphen von k und g_a. 2. $a = 3$: In diesem Fall ist der Graph von g wegen $k'(1) = g_a(1)$ die Tangente an den Graphen von k im Punkt (1 | 3). 3. $a < 3$: In diesem Fall schneidet der Graph von g_a den Graphen von k in zwei weiteren Punkten.	5	10	12

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Im Fall $a = 2$ gilt: $g_2 : x \to 2x+1$. Die Schnittstellen der Graphen sind gemäß Teil c) $x = 0$, $x = 1$ und $x = 2$. Damit schließen die Graphen von k und g_a zwei Flächenstücke ein. A_1 sei das Flächenstück über dem Intervall [0;1]. Entsprechend sei A_2 das Flächenstück über dem Intervall [1 ; 2]. Damit gilt: $$A_1 = \left\| \int_0^1 \left(g(x) - k(x) \right) dx \right\| = \left\| \int_0^1 \left(x^3 - 3x^2 + 2x \right) dx \right\| = \left\| \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \right]_0^1 \right\| = \frac{1}{4}.$$ Entsprechend erhält man $A_2 = \frac{1}{4}$. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ haben die Graphen von k und g_a den Punkt (1 | 3) gemeinsam. Dieser Punkt ist der Wendepunkt des Graphen von k. Da k eine ganzrationale Funktion dritten Grades ist, ist der Graph von k punktsymmetrisch zum Punkt (1 | 3). Hieraus ergibt sich, dass die von den Graphen von k und g eingeschlossenen Flächenstücke im Falle dreier Schnittpunkte aufgrund der Punktsymmetrie gleichen Flächeninhalt besitzen.		21	
	Insgesamt 100 BWE	15	73	12

Aufgabe 3: Kostenfunktion   Gy, GS

Aufgabenstellung

Ein Industriebetrieb fertigt aus drei verschiedenen Materialien M_1, M_2 und M_3 und drei verschiedenen Bauteilen B_1, B_2 und B_3 drei verschiedene Geräte G_1, G_2 und G_3.

Die folgende Tabelle gibt an, welche Anzahl der Bauteile B_1, B_2 und B_3 für die Herstellung jeweils eines Gerätes G_1, G_2 und G_3 benötigt wird, wobei die Kosten für die Herstellung der Bauteile 2 GE für B_1, 1 GE für B_2 und 2 GE für B_3 betragen. (GE = Geldeinheiten)

	G_1	G_2	G_3
B_1	1	0	2
B_2	0	1	1
B_3	2	2	0

Die nächste Tabelle beschreibt, welche Mengeneinheiten der Materialien M_1, M_2 und M_3 für die Herstellung jeweils eines Gerätes G_1, G_2 und G_3 benötigt werden, wobei die Kosten für Einkauf und Lagerung einer Mengeneinheit der Materialien für M_1, M_2 und M_3 jeweils 1 GE betragen.

	G_1	G_2	G_3
M_1	1	2	4
M_2	4	3	5
M_3	2	4	2

a) Ermitteln Sie die Kostenfunktionen K_B für die Bauteile und K_M für die Materialien, die beschreiben, welche Kosten jeweils entstehen, wenn x Stück von G_1, y Stück von G_2 und z Stück von G_3 hergestellt werden. Die Funktionsterme enthalten also die drei Variablen x, y, z.

Die Kosten für die Fertigstellung der Geräte werden durch die Funktion

$$K_G: \ (x;y;z) \to 2x^3 + 3y + 2z$$

beschrieben. Die von der produzierten Stückzahl unabhängigen Fixkosten betragen 200 GE.
Aus technischen Gründen gilt für die Anzahl der herstellbaren Geräte $y = 2x$ und $z = 3x$.

Leiten Sie nun her, dass aufgrund dieser Angaben die Funktion zur Berechnung der Gesamtkosten

$$K: \ x \to 2x^3 + 101x + 200$$

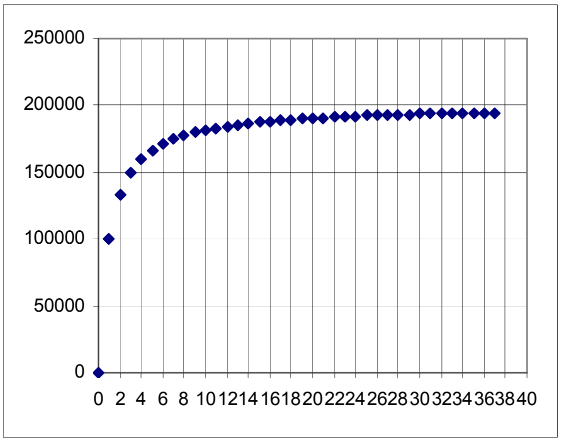
lautet, wobei x für die Stückzahl der insgesamt produzierten Geräte steht.

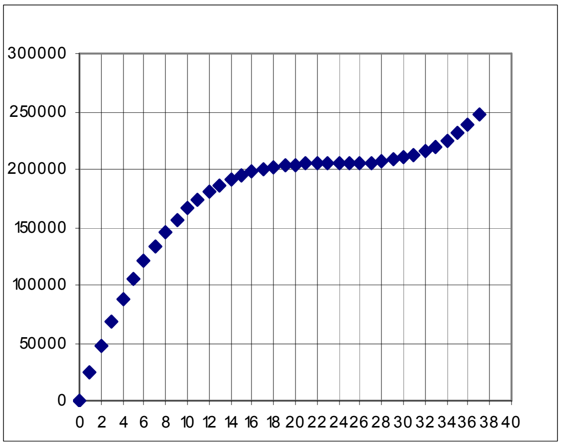
b) Untersuchen Sie, ob es eine Stückzahl x gibt, für die die Gesamtkosten besonders gering oder besonders hoch werden und begründen Sie das Ergebnis.

c) Für die durch den Verkauf der Geräte erzielten Einnahmen sollen als mögliche mathematische Modelle die beiden folgenden Erlösfunktionen betrachtet werden:

$$E_1: \ x \to \frac{200000x}{x+1} \qquad \text{und} \qquad E_2: \ x \to 16x^3 - 1120x^2 + 26200x$$

Die folgenden Diagramme geben die Entwicklung des Erlöses in € in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl x an.





Interpretieren und beurteilen Sie die obigen Diagramme im Hinblick darauf, welche Erlösfunktion Ihrer Meinung nach besser geeignet ist, um den Umsatz des Betriebes zu beschreiben.

d) In diesem Aufgabenteil geht es um die Gewinnfunktion $G:\ x \to E(x) - K(x)$, die den Gewinn des Unternehmens in Abhängigkeit von der produzierten Stückzahl x beschreibt. Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil die Erlösfunktion E_1 , unabhängig von Ihrer Bearbeitung des Aufgabenteils c).

(1) Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Gewinnfunktion ein lokales Maximum annimmt.

(2) Bestimmen Sie, ohne die Ableitungsfunktion G' zu bilden, bei welcher produzierten Stückzahl x die Gewinnfunktion das Maximum annimmt. Bedenken Sie dabei, dass die Anzahl der produzierten Geräte ganzzahlig sein muss.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Der ersten Tabelle entnimmt man: Für die Herstellung von x Stück von G_1, y Stück von G_2 und z Stück von G_3 werden $x+2z$ Bauteile B_1, $y+z$ Bauteile B_2 und $2x+2y$ Bauteile B_3 benötigt. Unter Berücksichtigung der Kosten für die Herstellung der Bauteile lautet damit die Kostenfunktion K_B: $$K_B:\ (x;y;z)\to 6x+5y+5z\,.$$ Der zweiten Tabelle entnimmt man: Für die Herstellung von x Stück von G_1, y Stück von G_2 und z Stück von G_3 werden $x+2y+4z$ Mengeneinheiten des Materials M_1, $4x+3y+5z$ Mengeneinheiten des Materials M_2 und $2x+4y+2z$ Mengeneinheiten des Materials M_3 benötigt. Unter Berücksichtigung der Kosten für Einkauf und Lagerung der Materialien lautet damit die Kostenfunktion K_M: $$K_M:\ (x;y;z)\to 7x+9y+11z\,.$$ Unter Beachtung der technischen Randbedingungen $y=2x$ und $z=3x$ erhält man die Gesamtkosten durch $$K:\ x\to K_G(x;2x;3x)+K_B(x;2x;3x)+K_M(x;2x;3x)+200$$ nach wenigen leichten algebraischen Umformungen wie in der Aufgabe angegeben zu $$K:\ x\to 2x^3+101x+200.$$	5	22	
b)	Zunächst wird die Ableitungsfunktion K' benötigt. Es gilt: $$K':\ x\to 6x^2+101\,.$$ Da diese Funktion offensichtlich keine Nullstelle besitzt, hat die Gesamtkostenfunktion K keine lokalen Extremstellen. Da K' stets positiv ist, ist K streng monoton wachsend. Mit steigender Zahl produzierter Geräte steigen die Gesamtkosten für die Herstellung somit theoretisch über alle Grenzen. Die höchsten Gesamtkosten entstehen daher, wenn die produzierte Stückzahl der Geräte maximal ist. Durch zur Verfügung stehende Arbeitszeiten und Maschinenzeiten gibt es hier eine technische Grenze. Die geringsten Gesamtkosten entstehen, wenn keine Geräte hergestellt werden, da dann lediglich die laut Aufgabe zu beachtenden Fixkosten entstehen.	11	8	
c)	Die Erlösfunktion E_1 nähert sich mit wachsender Zahl produzierter Geräte asymptotisch dem Wert 200 000. Dies kann als eine Situation interpretiert werden, in der der Absatzmarkt für die Geräte gesättigt ist. In einer solchen Situation kann auch durch weitere Steigerung der Stückzahl der produzierten Geräte der Erlös nicht erhöht werden. Die Erlösfunktion E_2 ist offenbar monoton steigend. Somit nimmt der Erlös mit wachsender Stückzahl produzierter Geräte grundsätzlich zu. Im Bereich der Stückzahlen von 16 bis etwa 28 (dies entspricht immerhin fast einer Verdopplung der Stückzahl!) steigt der Erlös nur sehr geringfügig an. Erst bei weiterer Steigerung der Stückzahl sind auch deutliche Erlössteigerungen zu verzeichnen.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Der Bereich der Stagnation des Erlöses bei E_2 könnte erklärt werden durch die Annahme, dass die Anschaffung der Geräte für einen bereits auf dem Markt etablierten Kunden der Firma mit größeren Begleitinvestitionen verbunden ist, diese Kunden also von der Notwendigkeit der Anschaffung erst überzeugt werden müssen. Beiden Diagrammen ist zu entnehmen, dass es sich um sehr hochwertige (da sehr teure) Geräte handelt. Der Absatzmarkt für solche Geräte dürfte relativ gering sein. Es erscheint somit plausibel, dass bereits bei relativ geringen Stückzahlen eine Sättigung des Marktes auftritt. Die Vermutung, dass E_1 die Entwicklung des Umsatzes besser beschreibt, ist daher nahe liegend.		8	19
d)	Die Gewinnfunktion G lautet nach Vorgabe der Aufgabenstellung: $$G:\ x \to \frac{200000x}{x+1} - 2x^3 - 101x - 200.$$ Die Ableitungsfunktion hiervon ist eine gebrochenrationale Funktion mit dem Zählergrad 4. Eine Nullstellenbestimmung auf herkömmliche Weise ist nicht zumutbar. Da die Erlösfunktion sich asymptotisch dem Wert 200000 nähert, die Kostenfunktion jedoch monoton steigt, wird der Gewinn mit steigender Stückzahl irgendwann abnehmen. Im Bereich kleiner Stückzahlen sind beide Funktionen monoton steigend und damit auch die Gewinnfunktion. Unter Beachtung des Hinweises der Aufgabe, dass die Anzahl der produzierten Geräte ganzzahlig sein muss, führt eine zielgerichtete Wertetabelle mit wenigen Schritten zum gewünschten Ergebnis: *x* / *G*(*x*): 5 / 165711,667; 10 / 178608,182; 20 / 172256,19; 25 / 158332,692; 15 / 179035; 16 / 178227,294; 14 / 179564,667; 13 / 179807,286; 12 / 179747,385 Der maximale Gewinn tritt also bei der Stückzahl $x = 13$ für die Geräte G_1 auf.		27	
	Insgesamt 100 BWE	16	65	19

Wertetabelle:

x	$G(x)$
5	165711,667
10	178608,182
20	172256,19
25	158332,692
15	179035
16	178227,294
14	179564,667
13	179807,286
12	179747,385

Aufgabe 4: Flusstal **Gy, GS**

Funktionsuntersuchung in einem Anwendungsbezug, Flächenberechnung durch Integration, Extremalproblem, Tangentenbestimmung

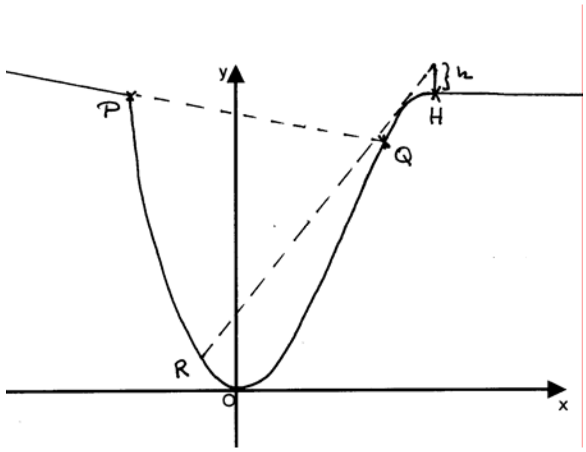
Die Aufgabe entspricht mit kleinen Veränderungen der Abituraufgabe GK 1998/1 aus Baden-Württemberg.

Aufgabenstellung

Ein Flusstal soll mit Hilfe einer Funktion f beschrieben werden. Dazu wird ein erster, vereinfachender Ansatz gemacht:

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2,\ x \in \mathbb{R}.$$

Zwischen dem Hochpunkt H des Graphen von f und dem Punkt $P(-2|f(-2))$ wird das Flusstal durch den Graphen von f auch ganz zufrieden stellend beschrieben. Des Weiteren verläuft das Profil des angrenzenden Geländes von H aus horizontal (nach rechts) und von P aus in Richtung der Geraden durch P und dem Punkt $Q(3 \mid f(3))$. Die nebenstehende Skizze dient nur der Orientierung und ist nicht maßstabsgetreu.



a) a1) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen sowie auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte (unabhängig vom Kontext der Aufgabe).

a2) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch P und Q.

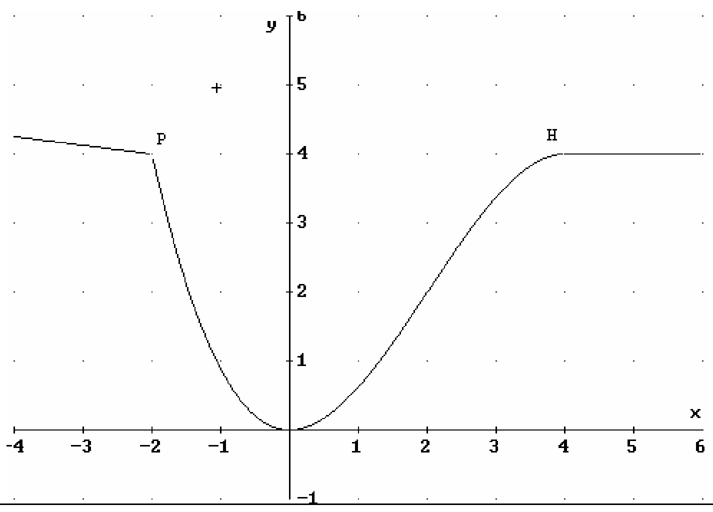
a3) Zeichnen Sie das Profil des Tales mit dem angrenzenden Gelände in ein Koordinatensystem ein.

b) Bei einem starken Hochwasser stieg das Wasser bis zum Punkt H. Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche des dann mit Wasser gefüllten Tales.

c) Von H soll eine unterirdische, gerade Leitung ausgehen und im Punkt $B(u \mid f(u))$ mit $0 < u < 4$ ins Tal münden.
Bestimmen Sie B so, dass die Leitung möglichst steil verläuft.

d) Bei Trockenheit ist der Wasserspiegel bis zum Punkt $R(-1 \mid f(-1))$ abgesunken.
Ab welcher Höhe h über dem Hochpunkt H ist dieser Punkt zu sehen?

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	a1) Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x) = 0$. Aus $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2(-\frac{1}{2}x+3)$ erhält man die Nullstellen für $x = 0$ oder $(-\frac{1}{2}x+3) = 0$, d. h. f hat die Nullstellen $x_{01} = 0$ und $x_{02} = 6$ und als gemeinsame Punkte mit der x-Achse $A(0\|0)$ und $B(6\|0)$. Schnittpunkte mit der y - Achse: $f(0) = 0$, d.h. $A(0\|0)$. Extremstellen: $f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}x(-\frac{3}{4}x+3)$. Die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ erfüllen $x_{E1} = 0$ und $x_{E2} = 4$. Aus $f''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ folgt $f''(0) = \frac{3}{2} > 0$ und $f''(4) = -\frac{3}{2} < 0$. Insgesamt erhält man also, dass der Graph von f bei x_{E1} einen Tiefpunkt $T(0\|0)$ hat und bei x_{E2} einen Hochpunkt $H(4\|f(4)) = H(4\|4)$ hat. Wendestellen: Eine mögliche Wendestelle erhält man durch die Lösung von $f''(x) = 0$. $x_W = 2$ erfüllt die Gleichung. Da außerdem $f'''(x) = -\frac{3}{4}$ ist, also $f'''(2) \neq 0$ ist, hat f bei $x_W = 2$ eine Wendestelle mit dem Wendepunkt $W(2\|f(2)) = W(2\|2)$.	10	12	
	a2) Es ist $f(-2) = 4$ und $f(3) = \frac{27}{8} = 3{,}375$. Also hat der Punkt P die Koordinaten $(-2\|4)$ und Q hat die Koordinaten $(3\|3{,}375)$. Die Steigung der Geraden durch P und Q erhält man durch $\frac{3{,}375-4}{3-(-2)} = -\frac{1}{8}$. Aus $f(-2) = 4 = -\frac{1}{8}(-2) + b$ erhält man $b = \frac{15}{4} = 3{,}75$. Also ist die Geradengleichung $y = -\frac{1}{8}x + \frac{15}{4}$.	4	4	
	a3) 	7		

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
b)	$H(4\|4)$ und $P(-2\|4)$ liegen beide auf der Geraden $y = 4$. Deshalb ist die Querschnittfläche gleich dem Flächeninhalt zwischen dieser Geraden und dem Graphen von *f*. $\int_{-2}^{4}(4-f(x))dx = \int_{-2}^{4}\left(4-\left(-\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{4}x^2\right)\right)dx$ $= \int_{-2}^{4}\left(\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2+4\right)dx$ $= \left[\frac{1}{32}x^4-\frac{1}{4}x^3+4x\right]_{-2}^{4}$ $= \frac{27}{2} = 13{,}5$ Die Querschnittsfläche hat den Inhalt $\frac{27}{2} = 13{,}5$.	2	6	
c)	Zuerst wird die Steigung der Geraden durch *B* und *H* in Abhängigkeit von *u* bestimmt. Von dieser Funktion wird anschließend das Maximum gesucht. $m(u) = \frac{4-f(u)}{4-u} = \frac{4+\frac{1}{8}u^3-\frac{3}{4}u^2}{4-u}$ $m'(u) = \frac{(\frac{3}{8}u^2-\frac{3}{2}u)(4-u)-(4+\frac{1}{8}u^3-\frac{3}{4}u^2)(-1)}{(4-u)^2}$ $= \frac{-\frac{1}{4}u^3+\frac{9}{4}u^2-6u+4}{(4-u)^2}$ Die notwendige Bedingung für eine Maximumstelle $m'(u) = 0$ führt auf die Gleichung $-\frac{1}{4}u^3+\frac{9}{4}u^2-6u+4=0$ bzw. $u^3-9u^2+24u-16=0$, da nur die Zählernullstellen in $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ zu beachten sind. Durch Probieren findet man $u_{M1}=1$ und kann mithilfe der Polynomdivision die anderen Nullstellen finden. $(u^3-9u^2+24u-16):(u-1)=u^2-8u+16$, und die Gleichung $u^2-8u+16=0$ hat $u_{M2} = 4$ als doppelte Nullstelle. Da $m(4)$ nicht definiert ist (siehe Aufgabenstellung), ist u_{M1} genauer zu untersuchen. Da $m(0) = \frac{4-0}{4-0} = 1,\quad m(1) = \frac{4-\frac{5}{8}}{4-1} = \frac{9}{8}$ und $m(2) = \frac{4-2}{4-2} = 1$ ist, liegt bei $u_{M1}=1$ eine Maximumstelle vor. Die Koordinaten von *B* sind also $(1/\frac{5}{8})$. <u>Alternativer Lösungsweg 1:</u> Bei der Extremwertbestimmung von $m(u)$ hätte man ausnutzen können, dass 4 eine Nullstelle des Zählerterms $4-f(u)$ ist und man dadurch $m(u)$ mithilfe der Polynomdivision vereinfachen könnte zu $m(u) = \frac{1}{8}(-u^2+2u+8)$. <u>Alternativer Lösungsweg 2:</u> Wenn man verschiedene Geraden durch *H* betrachtet, die den Graphen von *f* im Punkt $B(u\|f(u))$ schneiden, so ist die Gerade am steilsten, die den Graphen in *B* nur berührt, also Tangente ist.	6	21	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Der Punkt $U(4\|t)$ über $H(4\|4)$ ist dann gerade noch vom Punkt $R(-1\|f(-1))$ zu sehen, wenn die Gerade durch U und R den Graphen von f berührt, d. h. Tangente zum Graphen von f ist. Sei $S(s\|f(s))$, mit $0 < s < 4$, der Punkt, in dem die Tangente den Graphen berührt. Die Tangente t ist dann durch $t(x) = f'(s)\cdot(x-s)+f(s)$ definiert. Die Tangente verläuft auf Grund der Konstruktion durch den Punkt $R(-1\|f(-1)) =$ $R(-1\|\frac{7}{8})$, d. h. $t(-1) = \frac{7}{8} = f'(s)\cdot(-1-s)+f(s)$ $= \left(-\frac{3}{8}s^2+\frac{3}{2}s\right)\cdot(-1-s)+\left(-\frac{1}{8}s^3+\frac{3}{4}s^2\right)$ $= \frac{3}{8}s^2-\frac{3}{2}s+\frac{3}{8}s^3-\frac{3}{2}s^2-\frac{1}{8}s^3+\frac{3}{4}s^2$ $= \frac{2}{8}s^3-\frac{3}{8}s^2-\frac{3}{2}s.$ Also erhält man daraus durch Umformungen: $2s^3-3s^2-12s-7=0$. Mit Probieren findet man –1 als eine Lösung der Gleichung. Mit einer Polynomdivision findet man $(2s^3-3s^2-12s-7):(s+1)=2s^2-5s-7$. Die Lösungen der Gleichung $2s^2-5s-7=0$ sind $s=-1$ oder $s=\frac{7}{2}$. $s > 0$ war vorausgesetzt, also ist die endgültige Lösung $s=\frac{7}{2}$. Nun sind $f(\frac{7}{2})=\frac{245}{64}$ und $f'(\frac{7}{2})=\frac{21}{32}$, also folgt deshalb für die Tangente $t(x)=\frac{21}{32}(x-\frac{7}{2})+\frac{245}{64}=\frac{21}{32}x+\frac{49}{32}$. Setzt man nun 4 in den Tangententerm ein, so folgt $t(4)=\frac{21}{32}\cdot 4+\frac{49}{32}=\frac{133}{32}=4\frac{5}{32}$. Deshalb gilt für die Höhe h über dem Punkt $H(4\|4)$: $h=\frac{5}{32}$. <u>Alternativer Lösungsweg:</u> Man sieht von dem Punkt $U(4\|t)$ über H dann gerade noch den Punkt R, wenn die Gerade durch R und $S(s\|f(s))$ maximale Steigung hat.	6	7	15
	Insgesamt 100 BWE	35	50	15

Aufgabe 5: Zäune **Gy, GS, TG, WG**

Funktionsuntersuchung, Extremalproblem mit Einkleidung
Quelle für Aufgabenteil b): Abiturprüfung 1999/2000 Mecklenburg-Vorpommern

Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an, untersuchen Sie *f* auf Nullstellen, Symmetrie, Extrem- und Wendepunkte, sowie auf das Verhalten an den Rändern des Definitionsbereiches.

Zeichen Sie den Graphen von *f* in ein Koordinatensystem.

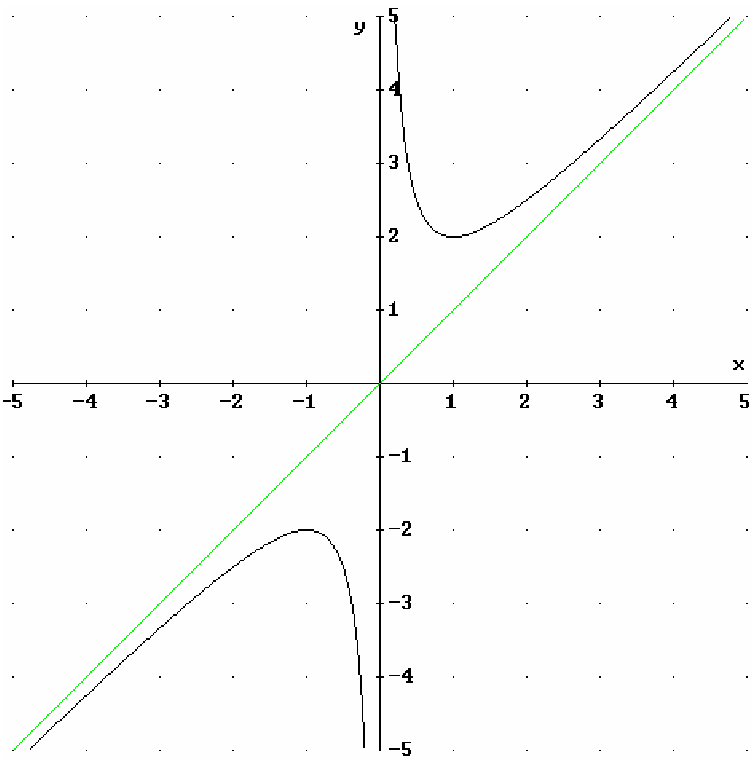
b) Ein Tierpark plant eine rechteckige Fläche als Gehege mit 6 kleineren rechteckigen Bereichen anzulegen (siehe Skizze). Für den Außenzaun ist mit 20 € je Meter, für den Innenzaun mit 10 € je Meter Zaunlänge zu rechnen. Zugänge und Durchgänge bleiben bei der Kalkulation unberücksichtigt.

b1) Berechnen Sie die Gesamtkosten für alle Zäune zunächst unter der Annahme, dass die Gesamtfläche quadratisch ist und einen Inhalt von 3.000 m² hat.

b2) Bestimmen Sie die äußeren Abmessungen für ein 3.000 m² großes Gehege so, dass die Gesamtkosten für alle benötigten Zäune minimal werden.

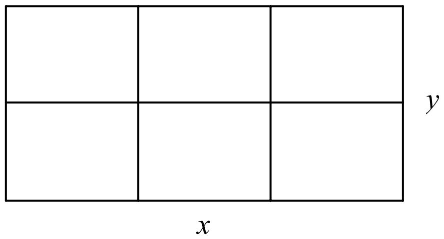
b3) Für den Kauf der Zäune stehen eigentlich nur 5.000 € zur Verfügung.
Berechnen Sie den maximalen Inhalt der Fläche, die dann eingezäunt werden könnte.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Die maximale Definitionsmenge ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Nullstellen: keine.
Symmetrie: Punktsymmetrie zum Nullpunkt, denn $f(-x) = -x - \frac{1}{x} = -f(x)$.
Ableitungen: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ und $f''(x) = \frac{2}{x^3}$.
Nullstellen der 1. Ableitung sind $x_{E1} = -1$ und $x_{E2} = +1$.
Wegen der Vorzeichen von f'' liegt ein Hochpunkt bei (–1|–2) und ein Tiefpunkt bei (1 | 2).
Da f'' stets ungleich 0, gibt es keine Wendepunkte.
Bei $x = 0$ ist ein Pol mit Vorzeichenwechsel, für $x \to \pm\infty$ gilt $f(x) \to \pm\infty$.
Graphische Darstellung:
</td><td>20</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>b1) Die Seitenlänge sei $x = \sqrt{3.000}$. Dann hat der Außenzaun eine Länge von $4x$, die Innenzäune von $3x$:
$$\begin{aligned} \textit{Gesamtkosten} &= 4 \cdot \sqrt{3.000} \cdot 20\,€ + 3 \cdot \sqrt{3.000} \cdot 10\,€ \\ &= 110 \cdot \sqrt{3.000}\,€ \\ &\approx 6.024{,}95\,€. \end{aligned}$$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

b2) Abmessungen des Geheges in m: x bzw. y (s. Skizze).



$K(x,y) = 2(x+y)\cdot 20 + (x+2y)\cdot 10 = 50x + 60y$.

Bedingung: $x \cdot y = 3.000 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3000}{x}$,

also $K(x) = 50x + \frac{180000}{x}$.

$K'(x) = 50 - \frac{180000}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_E = 60, \;\; y_E = 50$,
$K''(x) = \frac{360000}{x^3} \quad \Rightarrow \quad K''(60) > 0$, also Maximum bei $x_E = 60$.

Damit ist der Zaun für ein Gelände der Länge 60 m und der Breite 50 m am preiswertesten.

b3) $A(x,y) = x \cdot y$ und Kosten: $50x + 60y = 5.000 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{500}{6} - \frac{5}{6}x$.

Eingesetzt in A ergibt sich $A(x) = \frac{500}{6}x - \frac{5}{6}x^2$.
Diese nach unten geöffnete Parabel hat im Scheitelpunkt ein absolutes Maximum:

$$A'(x) = \frac{500}{6} - \frac{10}{6}x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_E = 50 \quad \Rightarrow \quad y_E = 41,\overline{6}.$$

Die maximale Fläche, die mit 5.000 € eingezäunt werden kann, ist $50 \cdot 41,\overline{6}$ m² = $2083\frac{1}{3}$ m² groß, oder etwa 2083,3 m².

Alternative Lösung ohne Verwendung der Differentialrechnung:
$A(x,y) = x \cdot y$ und Kosten: $50x + 60y = 5.000 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{6}\cdot(100 - x)$.

Die quadratische Funktion A mit nach unten geöffneter Parabel als Graph hat ersichtlich die Nullstellen 0 und 100 und damit ihren Scheitelpunkt (Hochpunkt) bei $x_E = 50$, $A(50) = 2083\frac{1}{3}$.

		I	II	III
	b2), b3)	5	35	20
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Aufgabe 6: Radioaktiver Zerfall Gy, GS, TG, WG

Funktionsdiskussion von e-Funktionen und Anwendung auf radioaktiven Zerfall.
Die Aufgabe benutzt die Idee einer radioaktiven Zerfallskette, wie in der Abituraufgabe GK 1998/3 in Baden-Württemberg.

Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktion g durch $g(x) = -50e^{-0,5x} + 150e^{-1,5x}$; $x \in \mathbb{R}^+$.

a) Bestimmen Sie die Null- und Extremstellen von g.

b) Wie verhält sich g für $x \to \infty$?
Zeichnen Sie den Graphen von g in ein Koordinatensystem ein.

c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die von dem Graphen von g , der x-Achse und der y-Achse begrenzt wird.

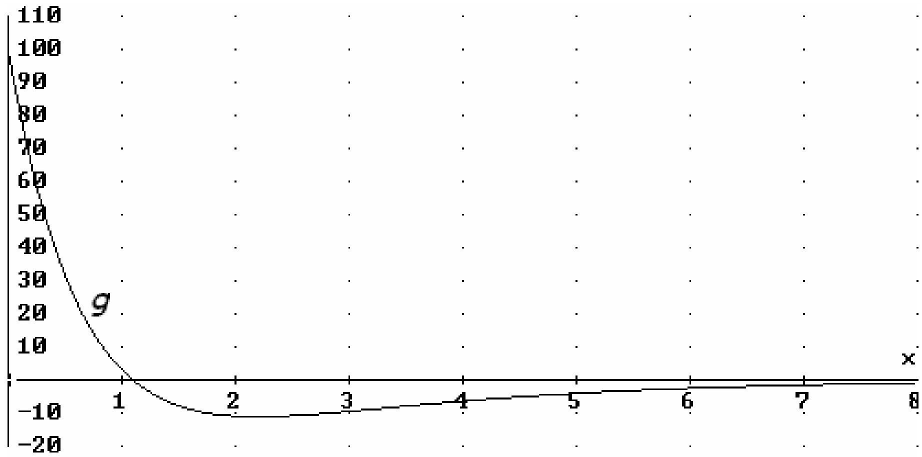
d) Beim radioaktiven Zerfall einer Substanz S_1 beschreibt $h_1(t)$ die Masse der noch nicht zerfallenen Substanz zum Zeitpunkt t. ($h_1(t)$ in *mg* und t in Stunden nach Beobachtungsbeginn).
Dabei gilt: $h_1(t) = 100e^{-0,5t}$.
Wie groß ist die Halbwertszeit dieses Zerfalles, d.h. die Zeit, nach der nur noch die Hälfte der ursprünglichen Substanz vorhanden ist?
Welche Masse ist nach 6 Stunden bereits zerfallen?

e) Eine zweite radioaktive Substanz S_2 entsteht erst als Zerfallsprodukt einer anderen Substanz. Für die Masse $h_2(t)$ der noch nicht zerfallenen Substanz S_2 gilt:

$$h_2(t) = 100e^{-0,5t}(1 - e^{-t}) \ .$$

Bestimmen Sie den Bestand für $t = 0$.
Zu welchem Zeitpunkt wird die größte Masse gemessen und wie groß ist sie?
In welchem Zusammenhang stehen die Funktionen h_2 und g ?
Welche Bedeutung hat das Integral $\int_0^t g(x)dx$?
(Beachten Sie Ihren in Aufgabenteil c) berechneten Flächeninhalt).

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Bestimmung der Nullstellen von g durch Nullsetzen des Funktionsterms: $g(x)=0 \Leftrightarrow -50e^{-0,5x}+150e^{-1,5x}=0 \Leftrightarrow e^{-0,5x}=3e^{-1,5x}$ $\Leftrightarrow -0,5x=\ln(3)-1,5x \Leftrightarrow x=\ln(3).$ Die einzige Nullstelle von g liegt bei $x=\ln(3)\approx 1,10$. Überprüfung auf mögliche Extremstellen durch Nullstellensuche bei der ersten Ableitung: $g'(x)=25e^{-0,5x}-225e^{-1,5x}$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow 25e^{-0,5x}-225e^{-1,5x}=0 \Leftrightarrow 1=9e^{-x} \Leftrightarrow x=\ln(9)$. Einsetzen der Stelle in die zweite Ableitung ergibt mit $g''(x)=-12,5e^{-0,5x}+337,5e^{-1,5x}$ $\quad g''(\ln(9))\approx 8,33>0$, d.h. g besitzt an der Stelle $\ln(9)\approx 2,20$ ein Minimum. ($g(\ln(9)\approx -11,1$)	10	8	
b)	Für $x \to \infty$ geht der Term $e^{-0,5x}$, sowie auch $e^{-1,5x}$ gegen Null und damit auch $g(x)\to 0$. Der Graph von g nähert sich also für zunehmende x-Werte der x-Achse. 	10	10	
c)	Der gesuchte Flächeninhalt F berechnet sich als Integral über g im Intervall von 0 bis ln(3): $F=\int_0^{\ln(3)} -50e^{-0,5x}+150e^{-1,5x}dx=\left[100e^{-0,5x}-100e^{-1,5x}\right]_0^{\ln(3)}$ $=\left[100\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-100\cdot\frac{1}{\sqrt{27}}-100+100\right]\approx 38,49$ und beträgt ca. 38,49 Flächeneinheiten.		16	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Zur Berechnung der Halbwertszeit wird für $h_1(t)$ der Wert 50 in die Funktionsgleichung eingesetzt und nach t aufgelöst. $50 = 100e^{-0,5t} \Leftrightarrow e^{0,5t} = 2 \Leftrightarrow t = 2\ln(2)$, $2\ln(2) \approx 1,39$. Die Halbwertszeit beträgt also ungefähr 1,39 Stunden. Die Masse M, die nach 6 Stunden zerfallen ist, beträgt: $M = 100 - h_1(6) = 100 - 100e^{-0,5 \cdot 6} \approx 95,02$ (mg).		18	
e)	Der Bestand zur Zeit $t = 0$ beträgt $h_2(0) = 100e^0 \cdot (1 - e^0) = 100 \cdot (1-1) = 0$. Also ist zu diesem Zeitpunkt noch keine Masse der Substanz S_2 vorhanden. Gesucht ist das Maximum der Funktion h_2 . Da gilt: $h_2'(t) = -50e^{-0,5t} + 150e^{-1,5t} = g(t)$, liegt eine mögliche Extremstelle von h_2 an der Nullstelle von g, also bei $t = \ln(3)$. Einsetzen in die zweite Ableitung von h_2 bzw. die erste Ableitung von g ergibt: $$h_2''(t) = g'(t) = 25e^{-0,5t} - 225e^{-1,5t} \Rightarrow h_2''(\ln(3)) \approx -28,87 < 0,$$ also ist ln(3) die Maximalstelle von h_2 mit dem Wert $h_2(\ln(3))$. Nach 1,10 Stunden wird die größte Masse der Substanz S_2 gemessen, nämlich 38,49 mg. Da g die Ableitungsfunktion von h_2 ist, gibt das Integral die noch nicht zerfallene Masse der Substanz S_2 zum Zeitpunkt t an.		13	15
	Insgesamt 100 BWE	20	65	15

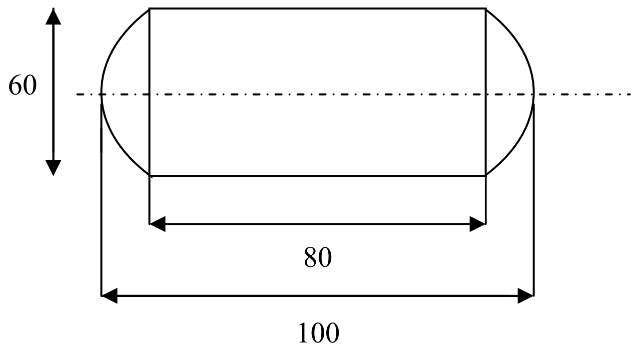
Aufgabe 7: Wassertank **Gy, GS**

Modellierungsaufgabe mit Volumenberechnung mittels Integration. Beispielaufgabe aus EPA Mathematik 2002.

Aufgabenstellung

In dieser Aufgabe soll zunächst das Volumen eines Wassertanks näherungsweise bestimmt werden und dann eine Füllhöhenfunktion skizziert werden.

a) Gegeben ist ein liegender Wassertank, der aus einem Zylinder mit zwei kuppelförmigen Aufsätzen besteht. Die Abmessungen sind der nebenstehenden Skizze des Querschnitts des Wassertanks zu entnehmen. Die Maße sind in Zentimetern angegeben. Die Skizze ist nicht maßstabsgetreu, stellt aber charakteristische Eigenschaften (z.B. Knicke) ausreichend gut dar.

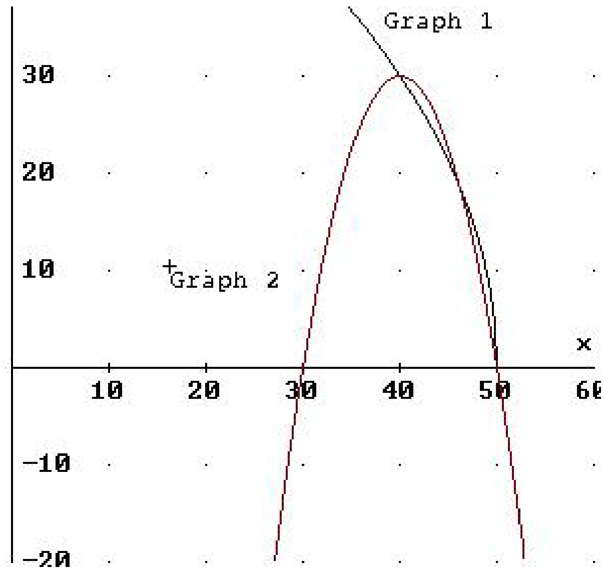


Schätzen Sie mit einfachen geometrischen Mitteln ab, dass weniger als 300 Liter in den Tank passen.

b) Es sollen nun die kuppelförmigen Aufsätze mathematisch beschrieben werden. Dazu betrachten Sie die Funktionen f und g mit

$$f(x) = -0{,}3(x-40)^2 + 30 \quad \text{und} \quad g(x) = \sqrt{4500 - 90x} \; .$$

Die Graphen der beiden Funktionen sind in der folgenden Zeichnung angegeben. Begründen Sie welcher Graph zu f bzw. g gehört.



Welche Art von Körpern entstehen, wenn man den Ausschnitt des jeweiligen Graphen im Intervall [40; 50] um die x-Achse rotieren lässt?

Beschreiben Sie, dass man mit beiden Funktionen die kuppelförmigen Aufsätze näherungsweise beschreiben kann und beurteilen Sie die Qualität der Näherung.

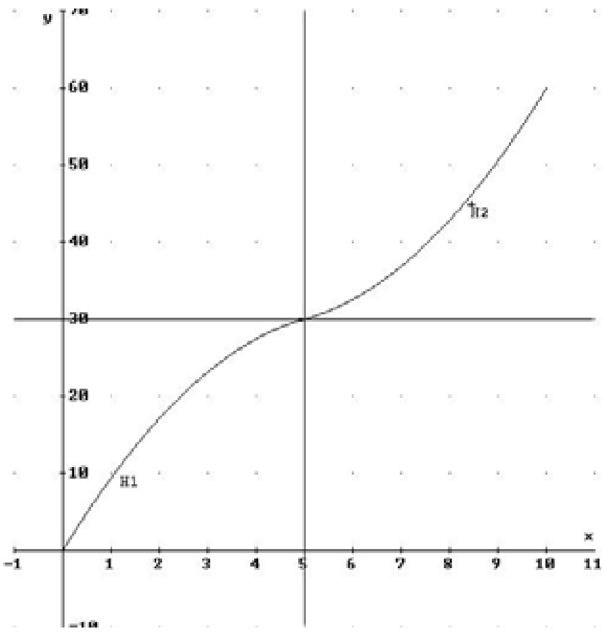
c) Das Volumen eines Körpers, der durch Rotation des Graphen einer Funktion k im Intervall $[a, b]$ um die x-Achse entsteht, kann durch die Formel $V = \pi \cdot \int_a^b (k(x))^2\, dx$ berechnet werden.

Bestimmen Sie das Volumen einer Tankkuppel mit Hilfe von $g(x)$.
Berechnen Sie nun mit dieser Näherung das Volumen des gesamten Wassertanks.

d) Der Wassertank wird bei konstanter Zuflussrate mit Wasser gefüllt.
Erläutern Sie den Verlauf des Graphen für die Funktion $H(t)$, die die Höhe der Wasseroberfläche im Tank über dem Boden zur Zeit t angibt, wenn der Tank, wie in der Skizze, auf der Seite liegt.
Skizzieren Sie grob den Verlauf des Graphen.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Legt man einen Zylinder mit einem Grundflächenradius von 30 cm und einer Höhe von 100 cm um den gesamten Tank, so erhält man eine Obergrenze für das Tankvolumen. $V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h = 282743$ cm^3 und 1 l = 1000 cm^3 ergibt: $V_{Tank} < 300$ l.	6	6	
b)	Die Funktion f ist quadratisch und ihr Funktionsterm in Scheitelpunktsform gegeben, ihr Graph muss eine nach unten geöffnete Parabel mit Scheitelpunkt (40 | 30) sein. Dieses trifft für den Graphen 2 zu. Der Graph 1 gehört zu der Wurzelfunktion g. Rotieren diese Graphenabschnitte um die x-Achse, so erhält man für beide Funktionen eine Kuppel. Bei der Funktion f weist die Kuppel eine Spitze auf, bei der Funktion g ist sie rund. Legt man ein Koordinatensystem mittig in den Wassertank, so beschreiben beide Funktionen im Intervall [40; 50] den Abschluss des rechten oberen Tankviertels, denn: $g(40) = f(40) = 30$ und $g(50) = f(50) = 0$. Der Graph der Funktion g schließt an der Stelle $x = 40$ mit einem Knick an den Tankkörper an, so wie in der Skizze angedeutet. Spiegelt man den Graphen von g an der x-Achse, so ergibt sich kein Knick für $y = 0$, da die Wurzelfunktion dort eine senkrechte Tangente besitzt, was ebenfalls der Skizze entspricht. Der Graph der Funktion f schließt an der Stelle $x = 40$ ohne Knick an den Tankkörper an, da dort der Scheitelpunkt der Parabel liegt, die Tangente also waagerecht ist. Allerdings weist der Graph von f bei $y = 0$ bei der Spiegelung an der x-Achse einen Knick auf, da die Steigungen endlich, aber entgegengesetzt im Vorzeichen sind. Die Funktion g gibt die in der Skizze erkennbaren charakteristischen Eigenschaften wieder und stellt damit, da Genaueres über die Tankform nicht bekannt ist, die bessere Näherung da.	12	26	6

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	Um das Volumen einer Tankkuppel zu erhalten, setzen wir die Funktion g für k in die angegebene Formel ein und integrieren über das Intervall [40; 50]. $V_{\text{Kuppel}} = \pi \cdot \int_{40}^{50} (4500 - 90x)\, dx = \pi \cdot \left[4500x - 45x^2\right]_{40}^{50} \approx 14137$ Das Kuppelvolumen beträgt also ca. 14,14 Liter. Um das Volumen des gesamten Wassertanks zu berechnen, benötigen wir zwei Mal das Kuppelvolumen sowie das Volumen des Mittelzylinders mit der Höhe 80 cm. $V_{\text{Zylinder}} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot 30^2 \cdot 80 \approx 226195$, d.h. das Zylindervolumen beträgt ca. 226,2 Liter. Damit ergibt sich das Gesamtvolumen zu: V = 254,5 l.	2	20	
d)	Liegt der Tank auf der Seite, so setzt sich die Füllhöhenfunktion H aus zwei Teilfunktionen zusammen, wobei die Füllhöhe von H_1 sich von 0 bis 30 cm erstreckt und die von H_2 von 30 bis 60 cm. Die Zunahme von H_1 (Ableitung) nimmt von der Füllhöhe 0 cm bis 30 cm ständig ab, da der Tankquerschnitt zunimmt. Bei der Funktion H_2 nimmt die Zunahme von der Füllhöhe 30 cm bis 60 cm ständig zu, da der Tankquerschnitt nun wieder geringer wird. Skizze:  		12	10
	Insgesamt 100 BWE	20	64	16

Aufgabe 8: Unwetter **Gy, GS**

Beschreibung von Funktionseigenschaften im Modellierungskontext, Grundvorstellung „Durchschnitt-Berechnung" beim Integral.

Aufgabenstellung

Nachdem am Abend des 1. August 2002 bis zu 65 Liter Regen pro Quadratmeter auf Hamburg niederprasselten, stand im „Hamburger Abendblatt" (3./4.08.2002) ein Artikel, der eine Erklärung dieser „Sintflut" gab:

„Die sehr warme Luft der vergangenen Tage hat große Mengen Wasser gespeichert. Wasser ist immer in der Luft enthalten, in Form von Wasserdampf. Dieser gelangt in die Atmosphäre, wenn durch Sonneneinstrahlung ein Teil des Wassers aus Ozeanen, Seen und Flüssen verdunstet. Wenn die wassergesättigte Luft plötzlich abkühlt, ist ihre Speicherfähigkeit überfordert. Es regnet. Wie stark, hängt davon ab, um wie viel Grad die Temperatur gesunken ist (s. Tabelle)."

Maximaler Feuchtigkeitsgehalt der Luft in Abhängigkeit von der Temperatur

Lufttemperatur in °C	*max. Feuchtegehalt in g/m³*
30	30,30
28	27,20
26	24,40
24	21,80
22	19,80
20	17,30
18	15,40
16	13,70
14	12,10
12	10,70
10	9,40
8	8,27
6	7,28
4	6,40
2	5,59
0	4,84
–2	4,14
–4	3,53
–6	3,02
–8	2,53
–10	2,15

a) Würde man alle Wertepaare der Tabelle in ein Koordinatensystem als Punkte einzeichnen (Temperatur als x-Koordinate) und die Punkte verbinden, erhielte man den Graphen einer Funktion.
Beschreiben und begründen Sie, welche Eigenschaften (Achsenschnittpunkte, Monotonie, Randverhalten) diese Funktion hat (im gegebenen Intervall $[-10,30]$ und auch für $x < -10$ und $x > 30$).

b) Um ein wenig mit dieser Funktion aus a) arbeiten zu können, wurde eine Näherung berechnet, die aber nur für den Definitionsbereich der Tabelle, also $[-10,30]$ gilt. Sie lautet

$$f(x) = 0{,}0003\, x^3 + 0{,}009\, x^2 + 0{,}34\, x + 4{,}84.$$

b1) Bei welchen in der gegebenen Tabelle benachbarten Temperaturwerten nimmt der maximale Feuchtegehalt der Luft besonders stark zu?
Interpretieren Sie Ihr Ergebnis in Hinblick auf den geschilderten Kontext: Gibt es Temperaturbereiche, in denen es eher zu sintflutartigen Regenfällen kommen kann als in anderen?

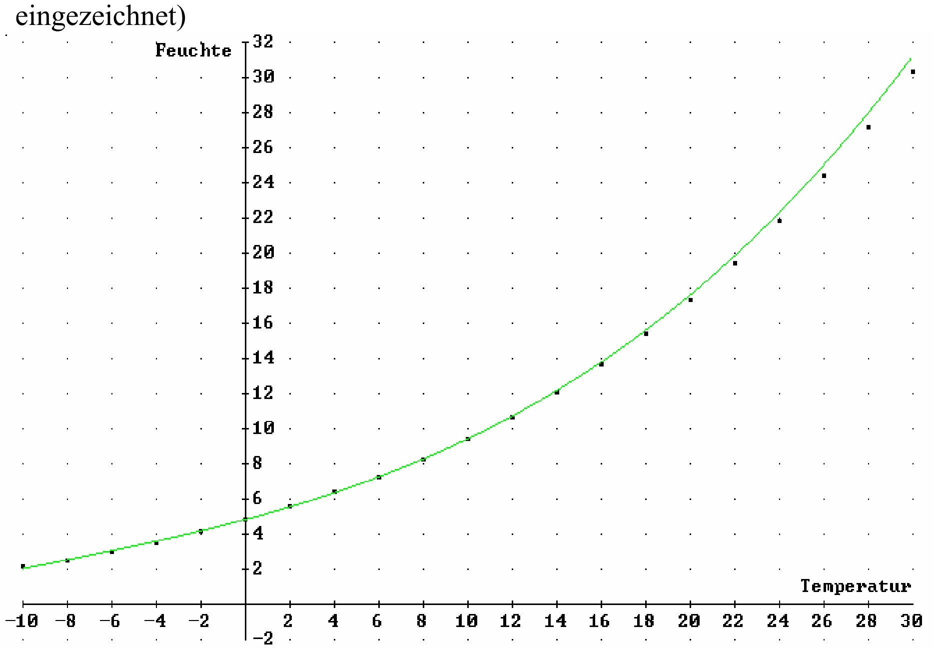
b2) Wie groß ist im Durchschnitt der maximale Feuchtegehalt der Luft im Bereich der Temperaturen von –10° bis 30°?

b3) Berechnen Sie das Integral $\frac{1}{40} \cdot \int_{-10}^{30} f(x)\,dx$.

Interpretieren Sie $\frac{1}{40°C} \cdot \int_{-10}^{30} f(x)\,dx$ im Kontext der Aufgabe.

c) Der in b) angegebene Term für die Näherungsfunktion entspricht nicht dem, den Meteorologen verwenden, denn der ist ohne Computer kaum handhabbar. Der Term in b) ist jedoch für den hier betrachteten Bereich (Temperaturen von –10° bis 30°) gar nicht schlecht.
Doch warum kann die in b) angegebene Näherungsfunktion den Zusammenhang zwischen Temperatur und maximalem Feuchtegehalt nicht für alle sinnvoll denkbaren Temperaturwerte beschreiben?
Beachten Sie dazu auch Ihre Erläuterungen im Aufgabenteil a).

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Die Funktion ist streng monoton wachsend, da die Funktionswerte (Feuchtegehalt) bei wachsenden Temperaturen ebenfalls zunehmen.
Die Funktion schneidet die y-Achse bei 4,84.
Die x-Achse kann offenbar nicht geschnitten werden, da die Menge der gespeicherten Feuchtigkeit stets nicht negativ sein muss.
Falls sich die Tabellenwerte bei weiteren Gradzahlen analog verhalten, nähert sich der Graph der Funktion beliebig der (negativen) x-Achse, wegen der Monotonie wachsen die Funktionswerte für zunehmende x-Koordinaten über alle Grenzen.
(Skizze ist nicht verlangt, zu den Punkten ist die Näherungsfunktion f aus b) eingezeichnet)

</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>b1) Die erste Frage kann mithilfe der Tabelle geklärt werden (Differenz zwischen zwei benachbarten Werten am größten zwischen 28 und 30, nämlich 3,10), aber auch mithilfe der Differenzialrechnung (Maximum der ersten Ableitung, die eine nach oben geöffnete Parabel ist. Daher liegt Maximum am Rand. Der Wert für x = 30 ist wegen der Vorzeichen größer als für $x = –10$).
Beide Möglichkeiten sind natürlich erlaubt, wie auch weitere sinnvolle.
Zur zweiten Frage: Da die lokale Änderung bei hohen Temperaturen größer ist als bei kleinen, ist die Gefahr starker Regenfälle bei hohen Temperaturen offenbar größer.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

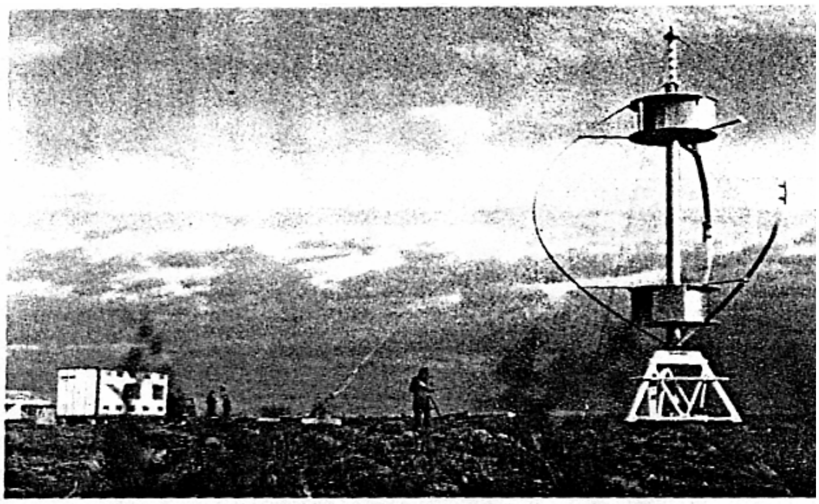
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	b2) Die Frage lässt sich mit der Tabelle beantworten: Addition der Tabellenwerte ergibt: 249,85; es sind 21 Werte, daher ist der Durchschnitt 11,8976. Eine Lösung wie in b3) wäre ebenso denkbar. b3) $\frac{1}{40}\int_{-10}^{30}(0{,}0003x^3 + 0{,}009x^2 + 0{,}34x + 4{,}84)\,dx =$ $\frac{1}{40}\cdot\left[\frac{1}{4}\cdot 0{,}0003x^4 + 0{,}003x^3 + 0{,}17x^2 + 4{,}84x\right]_{-10}^{30} =$ $\frac{1}{40}\cdot(439{,}95 + 33{,}65) = 11{,}84$ $\frac{1}{40°C}\cdot\int_{-10}^{30} f(x)\,dx$ gibt den durchschnittlichen maximalen Feuchtegehalt der Luft in g/m^3 im Temperaturbereich zwischen –10° und 30° an.	5	50	10
c)	Zum Beispiel (ein korrekter Grund genügt): Ein Polynom 3. Grades hat mindestens eine Nullstelle, nach der Beschreibung in a) hat die Funktion jedoch keine Nullstelle. Die Steigung der gesuchten Funktion wächst, ein Polynom 3. Grades hat jedoch einen Wendepunkt, an dem sich das Verhalten der Steigung ändert.		10	5
	Insgesamt 100 BWE	15	70	15

Aufgabe 9: Ganzrationale Funktionen, Darrieus-Windanlage TG

Das Aufgabenbeispiel ist gekennzeichnet durch den zunehmenden Schwierigkeitsgrad. Im ersten Aufgabenteil werden grundlegende Fertigkeiten aus dem Themenbereich Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen überprüft. Der zweite Aufgabenteil führt über die Integralrechnung zur Beantwortung einer technischen Fragestellung. Aufgabenteil drei setzt neben dem technischen Verständnis die Umsetzung der mathematischen Verfahren auf die konkrete Situation voraus.

Aufgabenstellung

Die auf dem Foto abgebildete Darrieus-Windanlage ist eine in Deutschland entwickelte Windenergieanlage, die im Auftrag des Bundesministeriums für Forschung und Technologie u.a. in Argentinien erprobt wurde. Die drei um eine senkrechte Drehachse angeordneten Metallblätter behalten bei schneller Drehung ihre Form bei.



20 kW Windenergie-Konverter in Comodoro Rivadavia/Argentinien

Die geometrische Form der Blätter des abgebildeten Rotors lässt sich näherungsweise durch eine ganzrationale Funktion 4. Grades beschreiben, wenn die x-Achse die Drehachse ist:

$$f(x) = 6 - 4{,}4 \cdot 10^{-2} \cdot x^2 - 4{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot x^4 .$$

a) a.1 Untersuchen Sie die Funktion auf Symmetrie, Nullstellen und Verhalten für $x \to \pm\infty$.

a.2 Zeigen Sie, dass der Durchmesser des Rotors 12 m und die Entfernung der Befestigungspunkte der Rotorblätter an der Achse rund 17,5 m beträgt.

Sollten Sie die Nullstellen der Funktion nicht bestimmt haben, so benutzen Sie für die folgenden Aufgabenteile $x_{N1} = -8{,}75$ und $x_{N2} = 8{,}75$.

a.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion im Intervall zwischen den beiden Nullstellen.

a.4 Berechnen Sie den Winkel, den die Blätter an den Nullstellen mit der x-Achse einschließen.

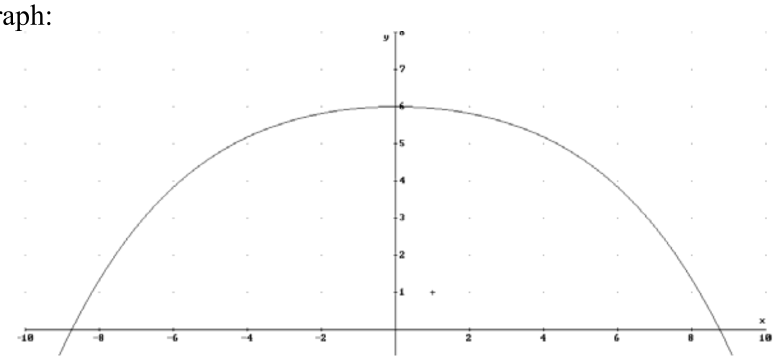
b) b.1 Bestimmen Sie den Inhalt der durch den Graphen der Funktion und der x-Achse eingeschlossenen Fläche.

b.2 Große Windenergieanlagen erreichen eine Flächenleistung von 400 W/m^2.
Berechnen Sie die Flächenleistung der Darrieus-Windanlage, die bei gleicher Windgeschwindigkeit eine Nennleistung von 20 kW liefert und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der o.g. Flächenleistung.

c) c.1 Bei einer Windgeschwindigkeit von 11 m/s beträgt die Drehzahl des Rotors 80 min^{-1}. Zeigen Sie, dass ein Punkt auf der Rotorblattmitte eine Geschwindigkeit von 50,27 m/s erreicht.

c.2 Bestimmen Sie die Stellen des Rotorblattes, an denen die Tangentialgeschwindigkeit (Umfangsgeschwindigkeit) gleich der Windgeschwindigkeit ist.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	1. Symmetrieeigenschaften: Da bei der gegebenen Funktion nur gerade Exponenten vorhanden sind, ist der Graph der Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse: $f(x) = f(-x)$ Nullstellen: Bed.: $f(x) = 0$ Lösen der Gleichung durch Substitution: $x^2 = z \Rightarrow X_{N1} = 8{,}747$; $X_{N2} = -8{,}747$ Verhalten für $x \to \pm\infty$: Da $-4{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot x^4$ der Term mit der höchsten Potenz ist und einen negativen Faktor besitzt, gilt für $x \to \pm\infty$: $f(x) \to -\infty$	10	5	
	2. Durchmesser: $d = 2\,a_0 = 2 \cdot 6\text{m} = 12\text{m}$ Entfernung der Befestigungspunkte: $\vert X_{N1} - X_{N2}\vert = \vert 8{,}747 - (-8{,}747)\vert$ m $\approx 17{,}5$m	10		
	3. Graph:  	15		
	4. Winkel: 1.Ableitung: $f'(x) = -0{,}0018x^3 - 0{,}088x$ $\tan \alpha_1 = f'(x_{N1}) = 1{,}974 \Rightarrow \alpha_1 = 63{,}14°$ $\tan \alpha_2 = f'(x_{N2}) = -1{,}974 \Rightarrow \alpha_1 = 116{,}86°$		15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>b)</td><td>1. Flächenbestimmung:
$$A = \int_a^b f(x)dx = \left|F(x)\right|_a^b = F(b) - F(a)$$
Stammfunktion: $F(x) = -0{,}00009x^5 - 0{,}0147x^3 + 6x$
$A = F(b) - F(a) = 76{,}117\ \mathrm{m}^2$</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>2. Flächenleistung:
Für die Flächenleistung muss für A der doppelte Wert der unter 2.1 berechneten Fläche berücksichtigt werden:
$$\text{Flächenleistung} = \frac{P}{2A} = \frac{20000W}{2\cdot 76{,}117m^2} = 131{,}377\frac{W}{m^2}.$$
Die Flächenleistung der Darrieus-Windanlage ist deutlich geringer als die Flächenleistung großer Windenergieanlagen.</td><td></td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>1. Tangentialgeschwindigkeit:
$$v_{\tan} = 2\pi\cdot r\cdot n = \frac{2\pi\cdot 6m\cdot 80\frac{1}{\min}}{60\frac{s}{\min}} = 50{,}265\frac{m}{s}$$
2. Stelle für $v_{\tan} = v_{Wind}$:
$$U = \frac{v_{Wind}}{n} = \frac{11\frac{m}{s}\cdot 60\frac{s}{\min}}{80\frac{1}{\min}} = 8{,}25m\ ;\quad r = \frac{U}{2\pi} = \frac{8{,}25m}{2\pi} = 1{,}313m$$</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Berechnung der dazugehörigen Stelle:
$$1{,}313\,\mathrm{m} = 6 - 4{,}4\cdot 10^{-2}\cdot x^2 - 4{,}5\cdot 10^{-4}\cdot x^4$$
Lösen der Gleichung durch Substitution: $x^2 = z \Rightarrow x_1 = 8{,}017$ m,
$x_2 = -8{,}017$ m.</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>35</td><td>50</td><td>15</td></tr>
</table>

Aufgabe 10: Ganzrationale Funktionen, Gewinnmaximierung WG

Die Aufgabe erfordert Kenntnisse aus dem Bereich Wirtschaft.

Aufgabenstellung

Für einen Betrieb gelte ein „S-förmiger" Kostenverlauf und es soll eine „einfachste" Kostenfunktion ermittelt werden. Die Fixkosten des Betriebes belaufen sich auf 10 GE. Weiterhin ist bekannt, dass der Graph der Kostenfunktion im Punkt $P(4|30)$ einen Sattelpunkt hat. Die Kapazitätsgrenze des Betriebes liegt bei 14 ME.

Hinweis:

Alle zu skizzierenden Funktionsgraphen sind in einem Koordinatensystem darzustellen. Wählen Sie dabei für die Ordinate 20 GE = 1cm und für die Abszisse 1 ME = 1 cm.

a) Zeigen Sie mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems, dass die „einfachste" Kostenfunktion wie folgt lautet:

$$K: \quad K(x) = \tfrac{5}{16}x^3 - \tfrac{15}{4}x^2 + 15x + 10 \quad .$$

Geben Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich an und skizzieren Sie den Graphen der Kostenfunktion.

b) Der Graph der linearen Preisabsatzfunktion verläuft durch die Punkte $P_1(1|15)$ und $P_2(9|5)$. Zeigen Sie, dass die Gleichung der Preisabsatzfunktion wie folgt lautet:

$$p: \quad p(x) = -\tfrac{5}{4}x + \tfrac{65}{4} \quad .$$

c) Bestimmen Sie anhand der Preisabsatzfunktion die Gleichung der Erlösfunktion $E(x)$ und untersuchen Sie diese hinsichtlich der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und des Extrempunktes und Skizzieren Sie den Graphen der Erlösfunktion.

d) Zeigen Sie, dass die Gleichung der Gewinnfunktion wie folgt lautet:

$$G: \quad G(x) = -\tfrac{5}{16}x^3 + \tfrac{5}{2}x^2 + \tfrac{5}{4}x - 10$$

Ermitteln die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze, die gewinnmaximale Absatzmenge, den maximalen Gewinn sowie den dazugehörigen Verkaufspreis und skizzieren Sie den Graphen der Gewinnfunktion.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die „einfachste" Funktion, die den vorgegebenen s-förmigen Verlauf mit einem Sattelpunkt erfüllt, wäre eine ganzrationale Funktion 3. Grades: $K(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ $K'(x) = 3ax^2+2bx+c$ $K''(x) = 6ax+2b$ $f(0) = 10 \qquad d = 10$ $f(4) = 30 \qquad 64a + 16b + 4c + d = 30$ $f'(4) = 0 \qquad 48a + 8b + c = 0$ $f''(4) = 0 \qquad 24a + 2b = 0$ Nach Lösen des LGS erhält man: $a = \frac{5}{16}$, $b = -\frac{15}{4}$, $c = 15$, $d = 10$ und $K: \; K(x) = \frac{5}{16}x^3 - \frac{15}{4}x^2 + 15x + 10$, $D_{Ök} = [0;14]$. (Funktionsgraph von K siehe Abbildung S. 45)		20	10
b)	$p: \; p(x) = ax + b$, $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{5-15}{9-1} = -\dfrac{5}{4}$, einsetzen in lineare Funktion mit $P(1\|15)$: $15 = -\frac{5}{4} + b \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{65}{4}$, $p: p(x) = -\frac{5}{4}x + \frac{65}{4}$.	5	5	
c)	$E(x) = p(x) \cdot x = (-\frac{5}{4}x + \frac{65}{4})x$ $E(x) = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{65}{4}x$ $Bed: \; x = 0 \qquad E(0) = 0 \qquad Sy(0/0)$ $Bed: \; E(x) = 0 \qquad -\frac{5}{4}x^2 + \frac{65}{4}x = 0$ $x(-\frac{5}{4}x + \frac{65}{4}) = 0 \quad x_1 = 0 \qquad Sx_1(0/0)$ $-\frac{5}{4}x + \frac{65}{4} = 0 \qquad x_2 = 13 \qquad Sx_2(13/0)$ $Bed: E'(x) = 0 \qquad und \qquad E''(x) \neq 0$ $E'(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{65}{4}$ $E''(x) = -\frac{5}{2} < 0 \qquad \Rightarrow \qquad Maximum \; (6,5/52,81)$ $-\frac{5}{2}x + \frac{65}{4} = 0 \qquad x_1 = 6,5 \qquad E(6,5) = 52,81$ (Funktionsgraph von E siehe Abbildung S. 45)	10	20	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

d) $G(x) = E(x) - K(x)$

$G(x) = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{65}{4}x - (\frac{5}{16}x^3 - \frac{15}{4}x^2 + 15x + 10)$

$G(x) = -\frac{5}{16}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{4}x - 10$

$Bed: G(x) = 0$

$-\frac{5}{16}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{4}x - 10 = 0 \qquad / \cdot (-\frac{16}{5})$

$x^3 - 8x^2 - 4x + 32 = 0$

Durch Probieren: $x_1 = 2$.

Horner Schema:

$$\begin{array}{l|rrrr} & 1 & -8 & -4 & 32 \\ \hline & 0 & 2 & -12 & -32 \\ x = 2 & 1 & -6 & -16 & 0 \end{array} \qquad \Rightarrow x_1 = 2$$

$x^2 - 6x - 16 = 0$

$x_2 = 8 \qquad x_3 = -2 \notin D_{Ök}$

Die Gewinnschwelle (GS) liegt bei $x = 2$ ME und die Gewinngrenze (GG) bei $x = 8$ ME.

$Bed: \quad G'(x) = 0 \;\; und \;\; G''(x) \neq 0$

$G'(x) = -\frac{15}{16}x^2 + 5x + \frac{5}{4}$

$G''(x) = -\frac{15}{8}x + 5$

$\Rightarrow \qquad -\frac{15}{16}x^2 + 5x + \frac{5}{4} = 0$

$x^2 - \frac{16}{3}x - \frac{4}{3} = 0$

$x_1 \approx 5{,}57 \qquad G(5{,}57) \approx 20{,}52, \quad G''(5{,}57) < 0 \Rightarrow$ Maximum

$x_2 = -0{,}24 \qquad \notin D_{Ök}$

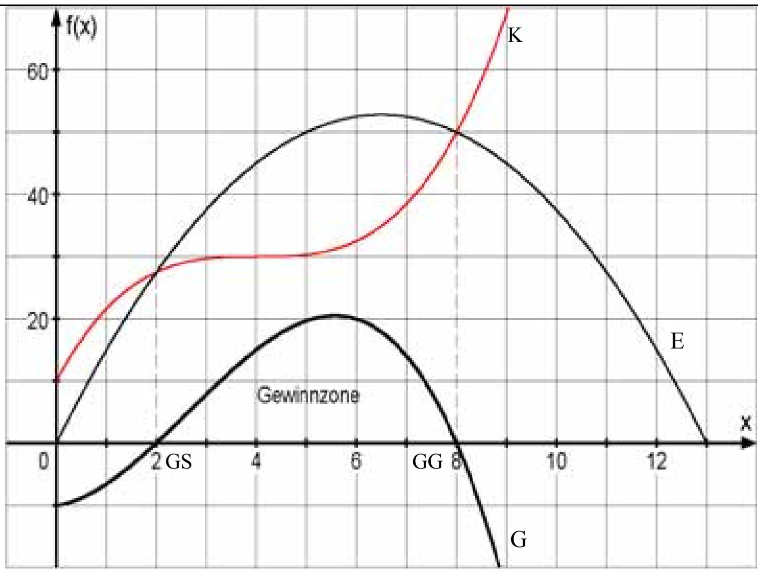
$p(5{,}57) \approx 9{,}29$

Gewinnmaximale Absatzmenge $x = 5{,}57$ ME

Maximaler Gewinn $G_{Max} = 20{,}52$ GE

Zugehöriger Verkaufspreis $p = 9{,}29$ GE

(Funktionsgraph von G siehe Abbildung S. 45)

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
		5	20	5
	Insgesamt 100 BWE	20	65	15

Aufgabe 11: Ganzrationale Funktionen **Gy, GS, TG, WG**

Aufgabenstellung

Der Graph einer ganzrationalen Funktion f berührt die x-Achse im Punkt $P_1(-1 \mid 0)$, verläuft durch den Punkt $P_2(0 \mid 2)$ und hat in der Stelle $x_0 = 2$ eine Steigung von $m = -9$.

a) Begründen Sie, dass die zugehörige ganzrationale Funktion mindestens 3. Grades sein muss, und zeigen Sie mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems, dass die Gleichung der Funktion f wie folgt lautet:

$$f(x) = -x^3 + 3x + 2\,.$$

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A, die der Graph von f mit der Abszisse einschließt.

c) Zeigen Sie durch entsprechende Berechnungen, dass die Gerade g mit der Gleichung $g(x) = 4$ Tangente im Maximum von f ist.

d) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche B, die der Graph von f mit der Geraden g einschließt, vergleichen Sie den Inhalt der beiden Flächen A und B und geben Sie dazu eine mathematische Erläuterung.

e) Gegeben ist zusätzlich die ganzrationale Funktion h:

$$h(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 - 2x + 2\,.$$

e1) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Funktionen f und h.

e2) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche C, die der Graph von f mit dem Graph von h im II. Quadranten einschließt.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung,
Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Ein Berührpunkt mit der x-Achse bedeutet, dass in diesem Punkt eine Steigung von $m = 0$ vorliegt und dass es sich um einen Extrem- oder Sattelpunkt handeln muss. Sollte ein Sattelpunkt vorliegen, muss es sich zwingend um eine ganzrationale Funktion mindestens 3. Grades handeln. Handelt es sich jedoch nur um einen Extrempunkt, so könnte auch eine ganzrationale Funktion 2. Grades diese Bedingung erfüllen. Dies setzt jedoch u.a. voraus, dass der Graph rechts vom Berührpunkt streng monoton wächst oder fällt. Die beiden weiteren Angaben zum Graphen von f bedeuten einerseits durch den Punkt P_2 ein Wachstum und andererseits durch die negative Steigung ein Gefälle rechts vom Berührpunkt. Daraus folgt: Die zugehörige ganzrationale Funktion muss mindestens 3. Grades sein.

- Allgemeiner Ansatz:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

- Bedingungsgleichungen

$$\begin{array}{lllrrrrcr} \text{I.} & f(-1) & = 0: & -a & +b & -c & +d & = & 0 \\ \text{II.} & f'(-1) & = 0: & 3a & -2b & +c & & = & 0 \\ \text{III.} & f(0) & = 2: & & & & d & = & 2 \\ \text{IV.} & f'(2) & = -9: & 12a & +4b & +c & & = & -9 \end{array}$$

- Lösen des LGS

Einsetzen von $d = 2$ in I. führt zu:

$$\begin{array}{rrrcr|r|r|} -a & +b & -c & = & -2 & 1 & 1 \\ 3a & -2b & +c & = & 0 & 1 & \\ 12a & +4b & +c & = & -9 & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcr|r|} 2a & -b & = & -2 & 5 \\ 11a & +5b & = & -11 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcr|l} 21a & = & -21 & :21 \\ a & = & -1 & \end{array}$$

Durch „stufenweises“ Einsetzen erhält man: $b = 0$ und $c = 3$.

$\Rightarrow \quad f(x) = -x^3 + 3x + 2$ (q.e.d.)

</td><td>5</td><td>15</td><td>10</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

Durch Polynomdivision bzw. Anwendung des Horner-Schemas erhält man neben der „Doppelnullstelle“ bei $x_{01/02} = -1$ eine weitere bei $x_{03} = 2$.

Daraus ergibt sich für das Integral als Fläche:

$$A = \int_{-1}^{2} (-x^3 + 3x + 2)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^{2} = \frac{27}{4} = 6{,}75 \text{ FE}.$$

</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	Bestimmung des Maximums von f: Notw. Bed.: $f'(x) = 0$ $f'(x) = -3x^2 + 3$ $-3x^2 + 3 = 0$ $x_{E1} = 1$ $x_{E2} = -1$ Hinr. Bed.: $f'(x_E+h) < 0 \;\wedge\; f'(x_E-h) > 0 \;\Rightarrow$ Maximalstelle in x_E $x_{E1} = 1$: $f'(1{,}1) \approx -0{,}63 \;\wedge\; f'(0{,}9) \approx 0{,}57 \;\Rightarrow$ Maximalstelle in x_{E1} $\Rightarrow\; x_{E2} = -1$ ist Minimalstelle $f(1) = 4 \;\Rightarrow\; E_{MAX}(1\|4)$ Hieraus folgt unmittelbar, dass die waagerechte Tangente im Maximum von f die Gleichung $g(x) = 4$ hat.	5	10	
d)	Aus $f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; -x^3 + 3x - 2 = 0$ und $x_{1/2} = 1$ lässt sich die 2. Schnittstelle $x_3 = -2$ durch Polynomdivision bzw. durch Anwendung des Horner-Schemas berechnen. Daraus ergibt sich für das Integral als Fläche: $B = \int_{-2}^{1} [g(x) - f(x)]dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{27}{4} = 6{,}75FE$ Die beiden Flächen A und B haben den gleichen Inhalt von 6,75 FE. Dies ist kein Zufall sondern bedingt durch die vorliegende Symmetrie zum Wendepunkt, der genau zwischen den Extrempunkten in $W(0\|2)$ liegen muss, und der Lage des Minimums $E_{MIN}(1\|0)$ auf der Abszisse.		15	5
e)	e1) $f(x) = h(x) \;\Leftrightarrow\; -x^3 + 0{,}5x^2 + 5x = 0$ $-x(x^2 - 0{,}5x - 5) = 0$ $x_1 = 0$ $x^2 - 0{,}5x - 5 = 0$ $x_{2/3} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + 5}$ $x_{2/3} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{81}{16}}$ $x_{2/3} = \frac{1}{4} \pm \frac{9}{4}$ $x_2 = 2{,}5$ $x_3 = -2$ $f(0) = h(0) = 2 \;\Rightarrow\; S_1(0\|2)$ $f(2{,}5) = h(2{,}5) = -6{,}125 \;\Rightarrow\; S_2(2{,}5\|-6{,}125)$ $f(-2) = h(-2) = 4 \;\Rightarrow\; S_3(-2\|4)$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	e2) Als Integrationsbereich für die Fläche C im II. Quadranten ergibt sich [–2;0]. Daraus ergibt sich für das Integral als Fläche: $C = \int_{-2}^{0} [h(x) - f(x)]dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^2\right]_{-2}^{0} = \frac{14}{3} \approx 4{,}67$ (FE).	5	10	5
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 12: Gebrochen-rationale Funktion TG, WG

Aufgabenstellung

Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2}{2x^2 - 2}.$$

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f (D_f) und die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und zeigen Sie, dass die folgende Behauptung gilt:

$$f(x) \Leftrightarrow f^*(x) = \frac{x^2}{2(x-1)} \qquad \text{mit } x \in \mathbb{D}_f.$$

b) Bestimmen Sie die Art der Definitionslücken und untersuchen Sie das Verhalten des Graphen von f in der jeweiligen h-Umgebung seiner Definitionslücken.

c) Ermitteln Sie die Gleichung der Asymptote und prüfen Sie, ob der Graph von f seine Asymptote schneidet.

d) Untersuchen Sie die Funktion f auf Extrem- und Wendepunkte. Zeigen Sie dabei, dass die zweite Ableitung von f gleichbedeutend ist mit:

$$f''(x) = \frac{1}{(x-1)^3} \qquad \text{mit } x \in \mathbb{D}_f.$$

e) Skizzieren Sie den Graph von f so, dass alle charakteristischen Punkte deutlich zu erkennen sind.

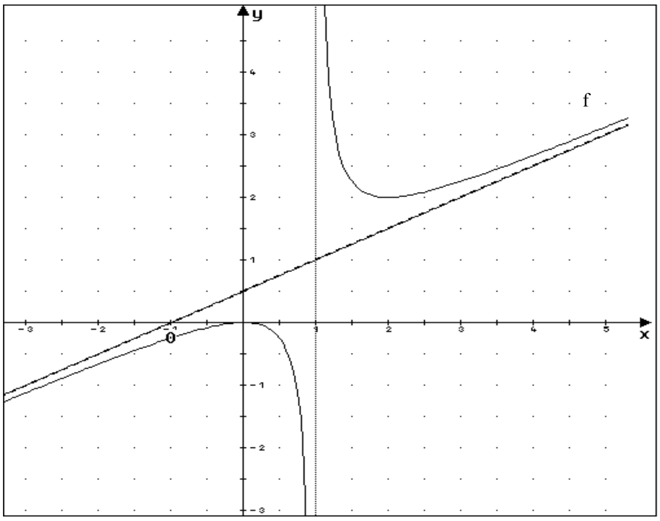
f) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche A, die der Graph der unter Teilaufgabe 4 bestimmten „schrägen“ Asymptote $A(x)$ mit der vertikalen Asymptote $x = 1$ und beiden Koordinatenachsen im I. Quadranten einschließt.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$D_f = R \setminus \{ -1;1 \}$ S_y: $x = 0 \quad \Rightarrow \quad Sy(0\|0)$ S_x: $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad Sx_{1/2}(0\|0)$ $x_3 = -1 \notin D_f$ Da $x = -1$ sowohl eine Nenner- als auch eine Zählernullstelle ist, lässt sich der zugehörige Linearfaktor $(x + 1)$ aus dem Zähler und dem Nenner kürzen. $f(x) = \frac{x^3 + x}{2x^2 - 2} = \frac{x^2(x+1)}{2(x-1)(x+1)}$. $\Rightarrow \quad f(x) \Leftrightarrow f^*(x) = \frac{x^2}{2(x-1)}$ mit $x \in D_f$.	5	15	10
b)	Die Definitionslücke $x = -1$ ist eine behebbare Lücke, weil sich der zugehörige Linearfaktor vollständig aus dem Nenner kürzen ließ. Die Definitionslücke $x = 1$ ist eine Polstelle 1. Ordnung, also eine Pol mit Vorzeichenwechsel. $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \pm h \\ h \to 0}} f(x) = f^*(-1) = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow$ b.L.$(-1 \| -\frac{1}{4})$ $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \pm h \\ h \to 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \pm h \\ h \to 0}} f^*(x) = \pm\infty \quad \Rightarrow$ Pol.$(\pm \infty)$ [A_{ver}: $x = 1$]		5	10
c)	Die Asymptote ist eine ganzrationale Funktion 1. Grades, weil der Zählergrad um 1 größer ist als der Nennergrad. Die Gleichung wird mit Hilfe der Polynomdivision ermittelt. Der „echt“ gebrochen-rationale Restbruch strebt für $x \to \pm \infty$ gegen 0. $(x^2) : (2x - 2) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x - 2} \quad \Rightarrow \quad A(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ $-\underline{(x^2 - x)}$ x $-\underline{(x - 1)}$ 1 Schnittpunkte zwischen f und A: $f^*(x) = A(x)$: $\frac{x^2}{2 \cdot (x-1)} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow$ Kein Schnittpunkt.		10	5
d)	$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$; $\quad f''(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ mit $x \in D_f$ (q.e.d.) . <u>Extrempunkte:</u> notw. Bed.: $f'(x) = 0$ Durch Lösen der zugehörigen Gleichung erhält man: $x_{E1} = 0$; $x_{E2} = 2$.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>hinr. Bed.: $f'(x_E+h) > 0 \;\wedge\; f'(x_E-h) < 0 \;\Rightarrow\; x_E$ ist Minimalstelle
$f'(x_E+h) < 0 \;\wedge\; f'(x_E-\mathrm{h}) > 0 \;\Rightarrow\; x_E$ ist Maximalstelle

$f'(0{,}1) \approx -0{,}12 \;\wedge\; f'(-0{,}1) \approx 0{,}08 \;\Rightarrow\; x_E = 0$ ist Maximalstelle
$f'(2{,}1) \approx 0{,}17 \;\wedge\; f'(1{,}9) \approx -0{,}12 \;\Rightarrow\; x_E = 2$ ist Minimalstelle

$f(0) = 0 \;\Rightarrow\; E_{\mathrm{MAX}}(\,0\vert 0\,)$
$f(2) = 2 \;\Rightarrow\; E_{\mathrm{MIN}}(\,2\vert 2\,)$
<u>Wendepunkte</u>
Keine Wendepunkte, weil $f''(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.</td><td>10</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>

$f(x) = \dfrac{x^3+x^2}{2x^2-2}$
$\Leftrightarrow f^*(x) = \dfrac{x^2}{2(x-1)}$</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Fläche zwischen $A(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ und x-Achse im Bereich $I = [\,0;1\,]$:

$\mathrm{A} = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_0^1 = 0{,}75$ FE.</td><td></td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>15</td><td>65</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 13: e-Funktion Gy, GS, TG, WG

Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktion *f*: $f(x) = e^x \cdot \left(e^x - 2\right)$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und untersuchen Sie die Funktion auf mögliche Symmetrieeigenschaften.

b) Ermitteln Sie das Verhalten des Graphen von f an den Rändern des Definitionsbereiches.

c) Untersuchen Sie die Funktion f auf Extrem- und Wendepunkte und zeigen Sie, dass f' wie folgt lautet:

$$f'(x) = 2e^x \cdot \left(e^x - 1\right).$$

d) Skizzieren Sie den Graph der Funktion f im Intervall $[-3;1]$. Maßstab: Eine Längeneinheit entspricht 2 cm.

e) Bestimmen Sie die Konstante k ($k \in R$) so, dass die folgende Funktion F eine Stammfunktion von f ist.

$$F(x) = \tfrac{1}{2}e^x \cdot \left(e^x - k\right).$$

f) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A, die der Graph der Funktion f mit der Abszisse und der Geraden $x = -1$ einschließt.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Der maximale Definitionsbereich einer e-Funktion ist ℝ. Damit ist auch das hier vorliegende Produkt zweier e-Funktionen über ℝ definiert.
Also: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Sy: $x = 0 \quad \Rightarrow \quad Sy(0|-1)$

Sx: $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x(e^x - 2) = 0$
$e^x = 0$(nicht erfüllbar, weil $\forall\, x \in \mathbb{R}$ gilt: $e^x > 0$)
$e^x - 2 = 0$
$x = \ln 2 \approx 0{,}69 \quad \Rightarrow \quad Sx(\ln 2 \mid 0)$

Symmetrieeigenschaften:
1. G_f verläuft symmetrisch zur y-Achse $\Leftrightarrow$ $f(x) = f(-x)$
2. G_f verläuft symmetrisch zum Nullpunkt $\Leftrightarrow$ $f(x) = -f(-x)$

1. $f(-x) = e^{-x}(e^{-x} - 2) = \frac{1}{e^x}\left(\frac{1}{e^x} - 2\right) \neq f(x)$
2. $-f(-x) = -e^{-x}(e^{-x} - 2) = -\frac{1}{e^x}\left(\frac{1}{e^x} - 2\right) \neq f(x)$
Folgerung: G_f verläuft weder symmetrisch zur y-Achse noch zum Nullpunkt.</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Die Ränder des Definitionsbereiches liegen im positiven und negativen Unendlichen:

$\lim\limits_{x\to\infty} e^x \cdot \left(e^x - 2\right)$ existiert nicht

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x \cdot \left(e^x - 2\right) = 0$</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Ableitungen von f unter Anwendung der Produktregel:

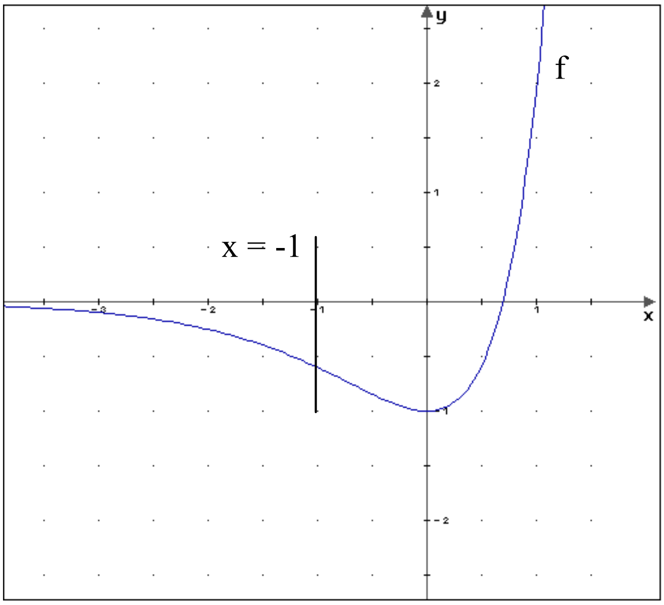
$f'(x) = e^x(e^x-2) + e^x(e^x)$
$= e^x(e^x-2 + e^x)$
$= 2e^x(e^x-1)$ (q.e.d.)

$f''(x) = 2[e^x(e^x-1) + e^x(e^x)]$
$= 2[e^x(e^x-1 + e^x)]$
$= 2e^x(2e^x-1)$

nur für die Verwendung der „einfachen“ hinr. Wendepunktbed.:

$f'''(x) = 2[e^x(2e^x-1) + e^x(2e^x)]$
$= 2[e^x(2e^x-1 + 2e^x)]$
$= 2e^x(4e^x-1)$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	1. Extrempunkte: notw. Bed.: $f'(x) = 0$ $2e^x(e^x - 1) = 0$ $2e^x = 0$ (nicht erfüllbar, weil $\forall\, x \in \mathbb{R}$ gilt: $e^x > 0$) $e^x - 1 = 0$ $x = \ln 1 = 0$ hinr. Bed.: $f'(x_E + h) > 0 \;\wedge\; f'(x_E - h) < 0 \;\Rightarrow\; x_E$ ist Minimalstelle $f'(x_E + h) < 0 \;\wedge\; f'(x_E - h) > 0 \;\Rightarrow\; x_E$ ist Maximalstelle $f'(0{,}1) \approx 0{,}23 \;\wedge\; f'(-0{,}1) \approx -0{,}17 \;\Rightarrow\; x = 0$ ist Minimalstelle $f(0) = -1 \;\Rightarrow\; E_{\text{MIN}}(\,0 \mid -1\,)$ 2. Wendepunkte: notw. Bed.: $f''(x) = 0$ $2e^x(2e^x - 1) = 0$ $2e^x = 0$ (nicht erfüllbar, weil $\forall\, x \in \mathbb{R}$ gilt: $e^x > 0$) $2e^x - 1 = 0$ $x = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \approx -0{,}69$ hinr. Bed.: $f''(x_W + h) > 0 \;\wedge\; f''(x_W - h) < 0$ $\Rightarrow\; x_W$ ist R/L-Wendestelle $f''(x_W + \mathrm{h}) < 0 \;\wedge\; f''(x_W - h) > 0$ $\Rightarrow\; x_W$ ist L/R-Wendestelle $f''(-0{,}6) \approx 0{,}11 \;\wedge\; f''(-0{,}8) \approx -0{,}09$ $\Rightarrow\; x = -\ln 2$ ist R/L-Wendestelle $f(-\ln 2) = 0{,}5(0{,}5-2) = -0{,}75 \;\Rightarrow\; W_{\text{R/L}}(-\ln 2 \mid -0{,}75\,)$	5	30	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
d)			10	
e)	F ist genau dann Stammfunktion von f, wenn gilt: $F'(x) = f(x)$ $F'(x) = \frac{1}{2}\,[e^x(e^x - k) + e^x(e^x)]$ $= \frac{1}{2}e^x(e^x - k + e^x)$ $= \frac{1}{2}e^x(2e^x - k)$ $= e^x(e^x - \frac{1}{2}k)$ Aus $f(x) = e^x(e^x - 2)$ folgt: $-\frac{1}{2}k = -2 \Leftrightarrow k = 4$ Für $k = 4$ ist F mit $F(x) = \frac{1}{2}e^x(2e^x - 4)$ Stammfunktion von f.			10
f)	Die gesuchte Fläche A liegt im Bereich $[-1;\ln 2]$ unterhalb der x-Achse. Daraus ergibt sich für das Integral als Fläche: $A = \int_{\ln 2}^{-1} e^x(e^x - 2)dx = \left[\frac{1}{2}e^x(e^x - 4)\right]_{\ln 2}^{-1}$ $= \left[\frac{1}{2e}(\frac{1}{e} - 4)\right] - \left[\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2-4)\right] \approx -0{,}668 + 2 \approx 1{,}33\,FE$		15	
	Insgesamt 100 BWE	15	70	15

4.1.2 Lineare Algebra / Analytische Geometrie

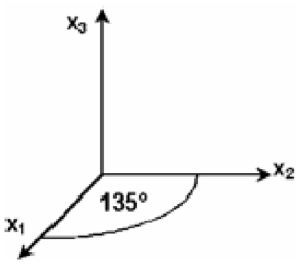
Aufgabe 1: Ein spezielles Dreieck — Gy, GS, TG, WG

Aufgabenstellung

Gegeben sind die Punkte $A\,(\,4 \mid 3 \mid -2\,)$, $B\,(\,2 \mid 2 \mid 0\,)$ und $C\,(\,4 \mid 0 \mid 1\,)$ sowie die Gerade g mit

$$\vec{x}_g = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

a) Stellen Sie die Punkte A, B, C, die Gerade g und alle folgenden Angaben in einem Koordinatensystem dar (1cm entspricht einer Einheit; Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$).



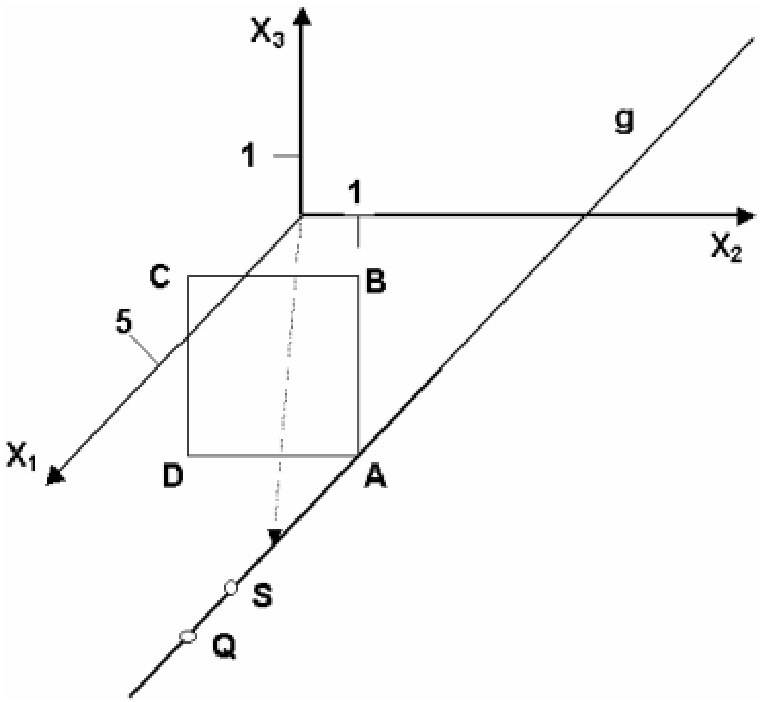
b) Der Punkt D bildet mit den Punkten A, B und C ein Parallelogramm. Bestimmen Sie die Koordinaten von D.

c) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist. Was folgt hieraus für das Viereck $ABCD$?

d) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene $\boldsymbol{E}$, in der das Viereck liegt. Zeigen Sie, dass die Gerade g die Ebene $\boldsymbol{E}$ senkrecht schneidet und bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S.

e) Beschreiben Sie, wie man die Koordinaten des Punktes Q erhält, der auf der Geraden g und dem Ursprung am nächsten liegt. Geben Sie die Koordinaten dieses Punktes Q an.
(Hinweis: Eine Wurzelfunktion hat dort einen minimalen Wert, wo der Radikand minimal wird.)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)			15	
b)	Wenn das Viereck *ABCD* ein Parallelogramm ist, dann sind die Vektoren von *A* nach *B* und von *C* nach *D* bzw. von *B* nach *C* und von *A* nach *D* jeweils parallel und paarweise gleich lang. Es gilt (z.B.): $\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\1\\-1\end{pmatrix}$, also $D\,(\,6 \mid 1 \mid -1\,)$.	10	10	
c)	Wenn das Dreieck *ABC* gleichschenklig sein soll, dann müssen 2 Seiten gleich lang sein: $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{(2-4)^2+(2-3)^2+(0+2)^2} = 3$. Mittels analoger Rechnungen erhält man für die Seite $\overline{BC}$ ebenfalls die Länge 3. Wenn diese beiden Seiten einen rechten Winkel einschließen sollen, dann muss das Skalarprodukt der Richtungsvektoren von *A* nach *B* bzw. von *B* nach *C* den Wert 0 haben. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = -4+2+2=0$ Da das gegebene Viereck nach Voraussetzung ein Parallelogramm ist und nun nachgewiesen wurde, dass 2 Seiten, die einen rechten Winkel einschließen, gleich lang sind, ist das Viereck ein Quadrat.		10	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>Eine Gleichung der Ebene E kann man bestimmen, in dem man den Ortsvektor zum Punkt A als Stützvektor und die Vektoren von A nach B bzw. von A nach C als Richtungsvektoren wählt. Also ist folgende Gleichung eine mögliche Beschreibung der Ebene:
$$\boldsymbol{E}\colon\ \vec{x}_E = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}.$$
Wenn die Gerade g die Ebene E senkrecht schneidet, dann müssen die Skalarprodukte des Richtungsvektors der Geraden g mit denen der Ebene E jeweils den Wert 0 ergeben. Elementare Rechnungen bestätigen diese Aussage.
Zur Bestimmung der Koordinaten des Schnittpunktes S ist das folgende lineare Gleichungssystem zu lösen:
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4 & - & 2r & & & = & 7 & + & u, \\ 3 & - & r & - & 3s & = & 3 & + & 2u, \\ -2 & + & 2r & + & 3s & = & -2 & + & 2u. \end{array}$$
Elementare Umformungen liefern für die Variablen die Werte:
$u = -\frac{1}{3}$, $r = -\frac{4}{3}$ und $s = \frac{2}{3}$.
Setzt man diese Werte in die Geraden- oder in die Ebenengleichung ein, so erhält man für den Schnittpunkt S die Koordinaten $\left(\frac{20}{3} \mid \frac{7}{3} \mid \frac{-8}{3}\right)$.</td><td>10</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Um die Koordinaten des Punktes Q zu bestimmen, der auf der Geraden g und dem Ursprung am nächsten liegt, bestimmt man zunächst allgemein den Abstand eines beliebigen Punktes auf der Geraden g zum Ursprung. Man erhält dann eine Funktionsgleichung in Abhängigkeit vom Parameter u.
Um den minimalen Abstand zu bestimmen, bestimmt man die Nullstellen der 1. Ableitung dieses Funktionsterms und weißt mit der 2. Ableitung an dieser Stelle nach, dass der Abstand ein Minimum ist. Dann setzt man den erhaltenen Wert für u in die Gleichung der Geraden g ein und erhält die Koordinaten des dem Ursprung nächstgelegenen Punktes Q.
Jeder Punkt P der gegebenen Geraden g hat die Koordinaten $P(7+u \mid 3+2u \mid -2+2u)$. Da der Abstand vom Ursprung berechnet werden soll, erhält man die Funktionsgleichung: $h(u) = 62 + 18u + 9u^2$. (Man muss nur den Radikanden betrachten, denn wenn dieser extremal ist, dann ist auch der Abstand extremal.)
Man bildet die 1. und 2. Ableitung von $h(u)$ und erhält: $h'(u) = 18 + 18u$ und $h''(u) = 18$. Die Nullstelle der 1. Ableitung liegt bei $u = -1$. Da $h''(u)$ immer positiv ist, ist dieser Wert ein Minimum. Man setzt für u in der Geradengleichung den Wert –1 ein und erhält für den gesuchten Punkt die Koordinaten $Q(6 \mid 1 \mid -4)$.</td><td></td><td>5</td><td>20</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 2: Zwei Geraden im Raum **Gy, GS**

Gegeben sind zwei Geraden, die in ihrer Lage zueinander und zu den Koordinatenebenen untersucht und dann gezeichnet werden. Berechnet werden ein Winkel, eine Ebene und eine weitere besondere Gerade.

Aufgabenstellung

In einem kartesischen Koordinatensystem sind zwei Geraden gegeben:

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad und \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass die beiden Geraden g_1 und g_2 nicht parallel sind und sich auch nicht schneiden (dass sie windschief sind).

b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte P_1 und Q_1 von g_1 und g_2 mit der x_1-x_2-Ebene und die Schnittpunkte P_2 und Q_2 von g_1 und g_2 mit der x_2-x_3-Ebene. Zeichnen Sie die vier Punkte und die Geraden in ein räumliches Koordinatensystem.

Hinweis: Zeichnen Sie die x_2-Achse nach rechts, die x_1-Achse nach „vorn“ im Winkel von 135° gegenüber der x_2-Achse und mit dem Faktor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ verkürzt und die x_3-Achse nach oben.

c) Welchen Winkel schließen die senkrechten Projektionen von g_1 und g_2 in der x_1-x_2-Ebene miteinander ein ?

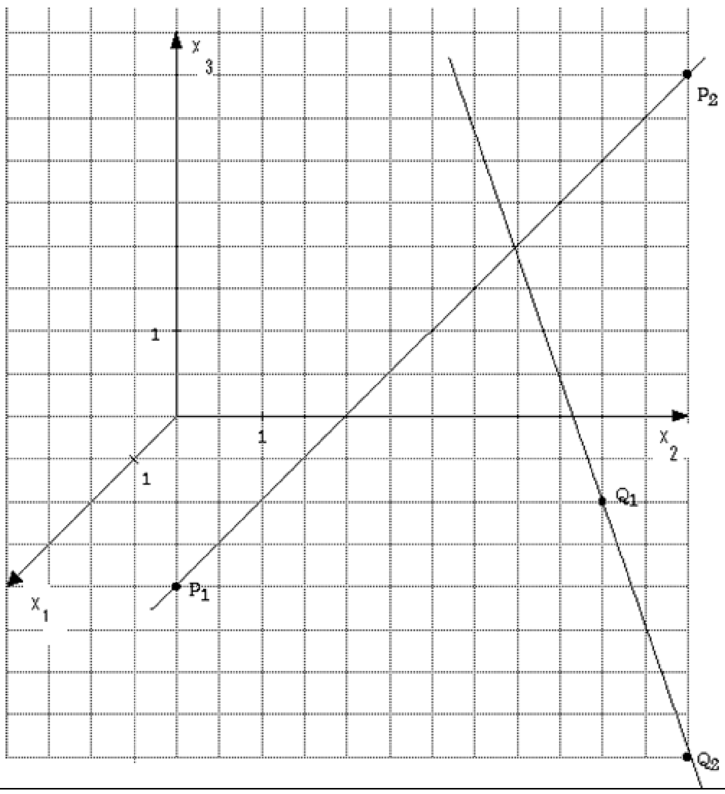
Gegeben ist ein weiterer Punkt $R\ (6 \mid 4 \mid 4)$.

d) Zeigen Sie, dass R nicht auf g_1 liegt.

e) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene $\boldsymbol{E}$ an, die R und g_1 enthält.

f) „Es gibt eine Gerade g, die durch R verläuft und g_1 und g_2 schneidet.“
Beschreiben Sie einen Weg zur Bestimmung dieser Geraden g und ermitteln Sie eine Parameterdarstellung.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Die Geraden sind nicht parallel zueinander, weil die Richtungsvektoren keine Vielfachen voneinander sind. Einen Schnittpunkt gibt es, wenn das Gleichungssystem eine Lösung besitzt: $\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ Aus der zweiten Gleichung folgt $r = 2$. Mit der ersten Gleichung ergibt sich $s = -3$. Die dritte Gleichung wird damit nicht gelöst. Es gibt also keinen Schnittpunkt.	5	9	
b)	Für Punkte der x_1-x_2-Ebene ist die x_3-Koordinate 0. Analog ist es mit der x_2-x_3-Ebene. Damit lassen sich die gesuchten Punkte leicht berechnen. $\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}\ P_1$ $\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\\4\end{pmatrix}\ P_2$ $\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\\0\end{pmatrix}\ Q_1$ $\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}+(-3)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\\-4\end{pmatrix}\ Q_2$	8	4	
		6	8	

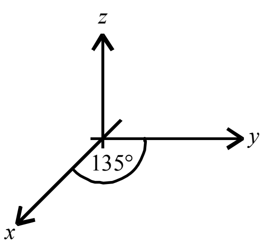
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	Die Projektionen haben die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Der Winkel ergibt sich mit Hilfe des Skalarprodukts: $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=-1=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}\cdot\cos\varphi,$ also $\cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\varphi=135°$ bzw. $\varphi=45°$.	6	6	
d)	Nachzuweisen ist, dass das Gleichungssystem <u>keine</u> Lösung besitzt: $$\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix}.$$ $r=0$ ist offenbar für die zweite Gleichung, nicht aber für die beiden anderen der richtige Wert.		8	
e)	Der Stützpunkt von g_1 kann auch als Stützpunkt von ***E*** dienen. Der Richtungsvektor von g_1 kann ein Richtungsvektor der Ebene ***E*** sein. Linear unabhängig dazu ist der Vektor $\begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, denn R liegt nicht auf der Geraden. Damit kann die Ebene z. B. wie folgt dargestellt werden: $$E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\quad r,t\in\mathbb{R}.$$ Nach Konstruktion ist klar, dass R und g_1 in dieser Ebene sind.		6 2	8
f)	R und g_1 liegen in einer Ebene, der Ebene ***E***. Die Gerade g muss daher auch in dieser Ebene liegen. Bestimmt wird sie durch den Schnittpunkt von g_2 mit dieser Ebene. Es wird zuerst dieser Schnittpunkt S berechnet und abschließend die Gerade g mit Hilfe von R und S beschrieben. $\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ *bzw.* $\left.\begin{array}{r}-r-s+2t=1\\ r=2\\ r-2s+t=0\end{array}\right\}\Rightarrow r=2\ \ s=\frac{7}{3}\ \ t=\frac{8}{3}$ $\Rightarrow S=\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\0\\\frac{14}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{16}{3}\\6\\\frac{20}{3}\end{pmatrix}\Rightarrow g:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}\frac{16}{3}-6\\6-4\\\frac{20}{3}-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\\4\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\2\\\frac{8}{3}\end{pmatrix},\ u\in\mathbb{R}.$		4 12	8
	Insgesamt 100 BWE	25	59	16

Aufgabe 3: Leuchtturm Gy, GS, TG, WG

Aufgabenstellung

Im Folgenden entspricht eine Längeneinheit 10 m in der Realität.
Gegeben sei ein Leuchtturm mit Fußpunkt A (10 | 9 | 0) und Spitze B (10 | 9 | 6). Der Leuchtturm wird idealisiert als Strecke $\overline{AB}$ betrachtet.
Außerdem gibt es einen Deich, dessen dem Leuchtturm zugewandte schräge Seitenfläche in einer Ebene liegt, die die x-Achse und den Punkt M (1 | –1,5 | 3) enthält.
Der Erdboden wird durch die x-y-Ebene beschrieben.
Machen Sie in allen anzufertigenden Zeichnungen bei eventuellen Überschneidungen deutlich, was vorne und was hinten liegt.

a) Zeichnen Sie den Leuchtturm in ein x-y-z-Koordinatensystem ein, wobei die y-Achse horizontal und die z-Achse vertikal liegt. Die Längeneinheit betrage 1 cm, der Verzerrungsfaktor auf der x-Achse betrage $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.



Vom Punkt P (14 | 14 | 0) wird eine Leuchtkugel senkrecht nach oben abgeschossen, die senkrecht wieder nach unten fällt und während der gesamten Flugzeit leuchtet. Die Höhe h der Leuchtkugel in Abhängigkeit von ihrer Flugzeit t wird in guter Näherung durch die Gleichung $h(t) = 5t - 0{,}5t^2$ beschrieben. Verwenden Sie diesen Zusammenhang bei Ihren späteren Berechnungen. Der höchste Punkt der Flugbahn ist Q (14 | 14 | 12,5).

Während des Fluges der Leuchtkugel wirft der Leuchtturm einen Schatten, der von der jeweiligen Höhe der Leuchtkugel abhängt. Die Leuchtkugel wird idealisiert als Punkt betrachtet.

b) Zeichnen Sie die Bahn der Leuchtkugel in das in Aufgabenteil 1 beschriebene Koordinatensystem ein.

c) Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes, auf den der Schatten der Leuchtturmspitze auf den Erdboden fällt, wenn die Leuchtkugel die Höhe $h = 12$ erreicht hat.

d) Zeichnen Sie den Schatten des Leuchtturmes in das in Aufgabenteil 1 beschriebene Koordinatensystem ein.

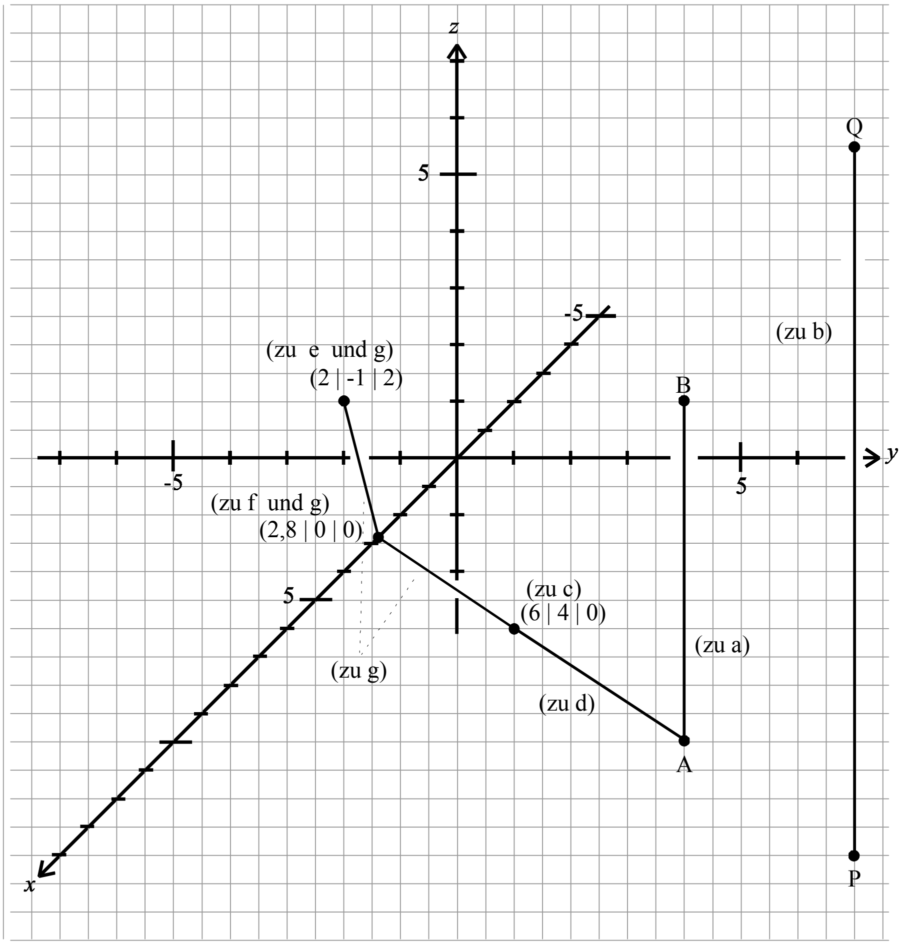
e) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes, auf den der Schatten der Leuchtturmspitze nach zwei Zeiteinheiten auf den Deich fällt.

f) Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes, an dem der Schatten des Leuchtturms zu dem genannten Zeitpunkt auf der x-Achse einen Knick macht.

g) Zeichnen Sie den Schatten des Leuchtturmes auf dem Erdboden und dem Deich zu dem genannten Zeitpunkt in das in Aufgabenteil 1 beschriebene Koordinatensystem ein.

h) Während des Fluges der Leuchtkugel bewegt sich der Schatten der Leuchtturmspitze entlang einer Bahn auf dem Erdboden und auf dem Deich. Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes R der Bahn auf dem Deich, an dem der Schatten der Leuchtturmspitze den geringsten Abstand zum Ursprung hat.
Hinweis: Eine Wurzelfunktion hat dort einen minimalen Wert, wo der Radikand minimal wird.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung, Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>

Diese Zeichnung beinhaltet auch die einzuzeichnenden Objekte zu den Aufgabenteilen b), d) und g).
Erwartet wird die Zeichnung des Koordinatensystems mit einem korrekten Winkel von 135° in der Zeichenebene zwischen x-Achse und y-Achse, die Achsenskalierung (auch im korrekten Verzerrungsverhältnis auf der x-Achse), die Achsenbezeichnungen und das Eintragen der Punkte A und B sowie deren Verbindungsstrecke.</td><td>16</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>(siehe Zeichnung zur Lösung von Aufgabenteil a))
Erwartet wird das Eintragen der Punkte P und Q sowie deren Verbindungsstrecke.</td><td>4</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Bestimmung der Gleichung der Geraden durch B und (14 | 14 | 12), z.B.
$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Bestimmung des Schnittpunkts mit der x-y-Ebene: Es ergibt sich $s = -1$, woraus sich der Schnittpunkt (6 | 4 | 0) ergibt. An diesem Punkt befindet sich der Schatten der Leuchtturmspitze.		10	
d)	(siehe Zeichnung zur Lösung von Aufgabenteil a)) Erwartet wird das Eintragen des Punktes (6 | 4 | 0) und dessen Verbindungsstrecke zum Punkt A.	2		
e)	Für $t = 2$ ergibt sich wegen $h(t) = 5t - 0{,}5t^2$ die Position der Leuchtkugel zu (14 | 14 | 8). Die Gleichung der Geraden durch B und (14 | 14 | 8) erhält man z.B. zu $g_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$ Die Deichebene wird beschrieben z.B. durch $E:\ \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$ Der Schnittpunkt von g_2 und $\boldsymbol{E}$ wird durch Lösen des folgenden linearen Gleichungssystems bestimmt: $\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}.$ Es ergibt sich $\lambda = \frac{4}{3}$, $\mu = \frac{2}{3}$, $r = -2$, wobei die Berechnung des Wertes für r ausreicht. Daraus ergibt sich der gesuchte Schnittpunkt zu (2 | –1 | 2). An diesem Punkt fällt der Schatten der Leuchtturmspitze auf den Deich.		18	
f)	Zur Bestimmung der Koordinaten, an denen der Schatten einen Knick macht, werden die Koordinaten des Schnittpunktes des Leuchtturmschattens auf der x-y-Ebene mit der x-Achse berechnet. Dazu muss der Schnittpunkt der Geraden g_3 durch die Punkte A und P mit der x-Achse bestimmt werden. Die Gleichung der Geraden g_3 ergibt sich z.B. zu $g_3:\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}.$ Weil für alle Punkte der x-Achse gilt: $y = z = 0$, ergibt sich $u = -1{,}8$ und damit der gesuchte Schnittpunkt zu (2,8 | 0 | 0). An diesem Punkt durchläuft der Schatten des Leuchtturms die x-Achse.		14	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
g)	(siehe Zeichnung zur Lösung von Aufgabenteil a)) Erwartet wird das Eintragen der Punkte (2,8 | 0 | 0) und (2 | –1 | 2), deren Verbindungsstrecke sowie der Verbindungsstrecke von (2,8 | 0 | 0) und *A*.	8		
h)	Die Bahn des Schattens der Leuchtturmspitze auf dem Deich wird durch einen Teil der Geraden durch (2 | –1 | 2) und (2,8 | 0 | 0) beschrieben. Diese Gerade ist darstellbar durch $g_4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0,8 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$ Der Abstand *r* jedes Punktes der Geraden zum Ursprung ist gegeben durch $r(s) = \sqrt{(2+0,8s)^2 + (-1+s)^2 + (2-2s)^2}\ .$ Wegen der Monotonie der Wurzelfunktion reicht es, bei einer Minimierung den Radikanden zu betrachten. Umformung des Terms im Radikanden, Untersuchung der dazugehörenden Funktion auf lokale Extrema und Ausschluss eines Randminimums führt zum Ergebnis, dass das Minimum von $r(s)$ für $s = \frac{85}{141}$ erreicht wird. Damit ergibt sich durch Einsetzen in die obige Geradengleichung für die Koordinaten des ursprungsnächsten Punktes der Bahn des Schattens der Leuchtturmspitze: $\left(\frac{350}{141} \mid -\frac{56}{141} \mid \frac{112}{141}\right) \approx \left(2,5 \mid -0,4 \mid 0,8\right)$.		4 14	10
	Insgesamt 100 BWE	30	60	10

Aufgabe 4: Pavillon — Gy, GS, TG, WG

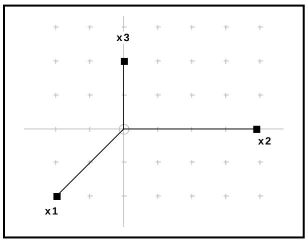
Eine eingekleidete Aufgabe. Ein Ausstellungspavillon ist durch die Begrenzungspunkte der Grund- und der Dachfläche gegeben. Gesucht werden die Flächenmaße von Grund- und Deckfläche, der Neigungswinkel des Daches und die Projektion eines Fensters auf der gegenüberliegenden Wand durch einfallende Sonnenstrahlen.
Diese Aufgabe entspricht mit kleineren Änderungen der Aufgabe 2001/2 in Baden-Württemberg.

Aufgabenstellung

Durch die Eckpunkte $O_1\,(0\,|\,0\,|\,0)$, $O_2\,(0\,|\,0\,|\,10)$,
$A_1\,(10\,|\,0\,|\,0)$, $A_2\,(10\,|\,0\,|\,11)$,
$B_1\,(10\,|\,6\,|\,0)$, $B_2\,(10\,|\,6\,|\,8)$,
$C_1\,(0\,|\,8\,|\,0)$, $C_2\,(0\,|\,8\,|\,6)$

ist ein Gebäude (Ausstellungspavillon) mit ebenen Seitenwänden gegeben, welches auf der x_1x_2-Ebene steht. (1 Längeneinheit entspricht 1 m)
Die Punkte O_1, A_1, B_1 und C_1 begrenzen die Grundfläche,
die Punkte O_2, A_2, B_2 und C_2 sind die Eckpunkte der Dachfläche.

a) Zeichnen Sie das Gebäude in ein Koordinatensystem ein (Längeneinheit: 1cm; Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung: $0{,}5\cdot\sqrt{2}$; Winkel zwischen x_1- und x_2- Achse: 135°).



b) Bestimmen Sie die Form und das Flächenmaß der Grundfläche des Pavillons.

c) Zeigen Sie, dass die Eckpunkte der Dachfläche in einer Ebene ***E*** liegen und geben Sie eine Gleichung von ***E*** an.

d) Die gesamte Dachfläche liegt in ***E***. Der Pavillon hat also ein Flachdach.
Falls die Neigung des Daches (Winkel zwischen ***E*** und der x_1x_2-Ebene) größer als 30° ist, muss ein Schneefanggitter angebracht werden.
Prüfen Sie, ob dies der Fall ist.

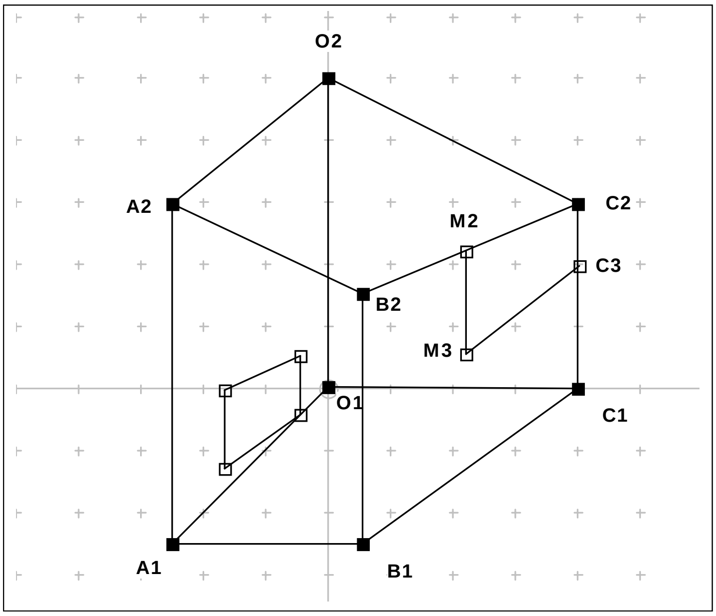
Die Höhe der Versicherungsprämie für Sturmschäden ist abhängig von der Größe der Dachfläche.

e) Der Architekt meint, die Dachfläche betrage 50 m^2. Weshalb kann dies nicht stimmen?

f) Wie könnte der Flächeninhalt des Daches bestimmt werden? Beschreiben Sie einen möglichen Lösungsweg. (Betrachten Sie dazu die Lage gegenüberliegenden Dachkanten.)

g) Die trapezförmige Fläche $M_2M_3C_3C_2$ mit $M_2\,(5\,|\,7\,|\,7)$, $M_3\,(5\,|\,7\,|\,4)$ und $C_3\,(0\,|\,8\,|\,4)$ in der entsprechenden Außenwand ist verglast. Durch diese Glasfläche fällt paralleles Sonnenlicht ein. Zu einem bestimmten Zeitpunkt treffen die Lichtstrahlen durch C_2 und M_3 in den Punkten $C_2'\,(2\,|\,0\,|\,2)$ und $M_3'\,(6{,}75\,|\,0\,|\,0{,}5)$ der gegenüberliegenden Wand auf. Schraffieren Sie den zu diesem Zeitpunkt vom Sonnenlicht getroffenen Bereich der Wand und beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
</td><td>12</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Die Grundfläche ist ein Trapez ($A_1B_1 \parallel O_1C_1$) mit rechten Winkeln bei O_1 und A_1.
Länge der parallelen Seiten: $d\left(\overline{A_1B_1}\right) = 6$ m, $d\left(\overline{O_1C_1}\right) = 8$ m, Länge der Trapezhöhe: $d\left(\overline{A_1O_1}\right) = 10$ m. Flächenmaß: 70 m^2.</td><td></td><td>25</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Eine Parameterform der Ebenengleichung durch O_2, A_2 und B_2:
$$\boldsymbol{E}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}10\\0\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}10\\6\\-2\end{pmatrix},\quad r, s \in \mathbb{R}.$$
Eine Koordinatenform der Ebenengleichung durch O_2, A_2 und B_2:
$$x_1 - 5x_2 - 10x_3 = -100.$$
C_2 liegt in $\boldsymbol{E}$: $0 - 5\cdot 8 - 10\cdot 6 = -100$.</td><td>13</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Ein Normalenvektor der x_1x_2-Ebene: $\vec{n_1} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.
Ein Normalenvektor von $\boldsymbol{E}$: $\vec{n_1} = \begin{pmatrix}-1\\5\\10\end{pmatrix}$.
Für den Schnittwinkel gilt: $\cos\alpha = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{\lvert\vec{n_1}\rvert\cdot\lvert\vec{n_2}\rvert} = \frac{10}{\sqrt{126}}$. $\alpha \approx 27{,}02°$.
Ein Schneefanggitter ist nicht nötig.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Die Dachfläche kann nicht kleiner sein als die Grundfläche.		5	
f)	Die Dachkanten $\overline{A_2B_2}$ und $\overline{O_2C_2}$ verlaufen parallel; die Dachfläche hat also die Form eines Trapezes T. Um die Höhe von T zu bestimmen, stellt man z. B. die Geradengleichung der Geraden g auf, die senkrecht auf $\overline{O_2C_2}$ steht und durch A_2 geht. Man berechnet den Schnittpunkt S von g und $\overline{O_2C_2}$. d(S, A_2) ist die Länge der Höhe von T. Der Flächeninhalt wird mit Hilfe der Längen der parallelen Seiten und der Höhe bestimmt.		20	
g)	M_2' liegt auf der Parallelen zu M_3M_3' und auf der Senkrechten zur x_1x_2-Ebene durch M_3'. C_3' liegt auf der Parallelen zu C_2C_2' und auf der Senkrechten zur x_1x_2-Ebene durch C_2'.			15
	Insgesamt 100 BWE	25	60	15

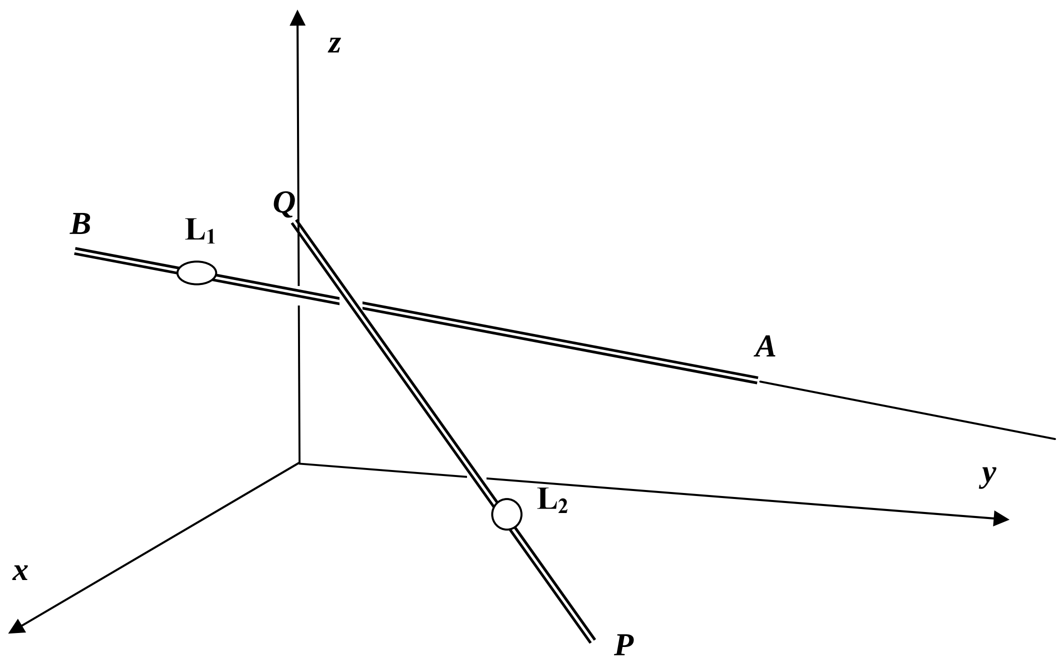
Aufgabe 5: Produktionshalle **Gy, GS**

Aufgabenstellung

Bei einer Produktionshalle soll der Fußboden durch die Ebene $z = 0$ beschrieben sein; die eine Wand sei die Ebene $y = 0$. In dieser Halle gibt es zwei gerade Transportschienen. Beide verbinden den Fußboden mit der erwähnten Wand.

Die erste Schiene geht durch die Punkte A (0 | 8 | 2) und B (4 | 0 | 6), die zweite Schiene verbindet die Punkte P (4 | 8 | 0) und Q (0 | 0 | 4).

Auf beiden Schienen fahren kleine Laufkatzen, also kleine Transportfahrzeuge. In der Zeichnung sind sie mit L_1 und L_2 bezeichnet; für die Rechnungen sollen die Laufkatzen als Punkte betrachtet werden.



a) Ermitteln Sie die Gleichungen der entsprechenden Geraden g_1 und g_2 .

b) Zeigen Sie, dass die Geraden sich nicht schneiden.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes, an dem die erste Schiene den Fußboden erreicht.

d) Von den Laufkatzen tropft immer ein wenig Öl herunter. Diese Tropfen bilden Geraden auf dem Fußboden. Ermitteln Sie die Gleichungen der Geraden h_1 und h_2, auf der die Tropfen der ersten bzw. der zweiten Schiene liegen.

e) Berechnen Sie: Unter welchem Winkel steigen die Schienen gegen die Ebene des Fußbodens an?

Laufkatze L_1 bewegt sich von A nach B. Ihre Position in Abhängigkeit von der Zeit wird durch folgende Funktion beschrieben:

$$\overrightarrow{x_{L1}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend bewegt sich die Laufkatze L_2 von Q nach P. Ihre Bewegung folgt folgender Funktion:

$$\overrightarrow{x_{L2}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

f) Bestimmen Sie für beide Laufkatzen, wie viele Zeiteinheiten sie jeweils für den Weg von A nach B bzw. von Q nach P benötigen.

g) Zeigen Sie, dass sich beide Laufkatzen mit gleicher Geschwindigkeit bewegen.

h) Der Abstand der beiden Laufkatzen als Funktion der Zeit sei:

$$d(t) = \left| \overrightarrow{x_{L1}}(t) - \overrightarrow{x_{L2}}(t) \right|.$$

Zu welchem Zeitpunkt (bezogen auf den Start) kommen sich die Laufkatzen am nächsten? An welchen Positionen befinden sie sich zu diesem Zeitpunkt?

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Geradengleichungen ergeben sich aus den je zwei gegebenen Punkten sofort in der Punkt-Richtungs-Form: $g_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$, und $g_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$. (Hinweis: Es ist grundsätzlich sinnvoll, die Komponenten von Richtungsvektoren so weit zu kürzen, dass sie teilerfremd sind.)	12		
b)	Hier ist das LGS $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ für λ und μ zu lösen. Da die letzten beiden Gleichungen ($\lambda + \mu = 4$ und $\lambda + \mu = 2$) nicht gleichzeitig erfüllbar sind, hat das LGS keine Lösung – damit gibt es keinen Punkt, der auf beiden Geraden gleichzeitig liegt. Die Geraden schneiden sich nicht (sie sind windschief).		12	
c)	Der Fußboden hat $z = 0$; damit ist die Gleichung $0 = 2 + \lambda$ zu lösen, was $\lambda = -2$ ergibt. Dieser Wert in g_1 eingesetzt ergibt den gesuchten Punkt $P(-2 \mid 12 \mid 0)$.	8		
d)	Da die Geraden h auf dem Fußboden laufen, gilt für sie $z = 0$. Damit ergibt sich $h_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$, und $h_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Hier ist der Winkel zwischen den Richtungsvektoren jeweils der zusammengehörigen Paare von g- und h- Geraden zu bestimmen. Die Berechnung erfolgt sinnvollerweise mit dem Skalarprodukt und ergibt $\alpha_1 = 24.09°$ und $\alpha_2 = 24.09°$. (Hinweis: Eine genaue Betrachtung der Richtungsvektoren erspart eine zweite Rechnung!)		12	
f)	Hier kann selbstverständlich der Abstand zwischen den Punkten durch den Betrag des Zeit-Vektors geteilt werden; es reicht aber, die entsprechende Division nur in einer Komponente aufzuführen. Es ergibt sich $t_1 = 4ZE$ und $t_2 = 4ZE$.	6		
g)	Jetzt werden doch die Abstände benötigt: $d(AB) = \sqrt{(0-4)^2 + (8-0)^2 + (2-6)^2} = 4$. Entsprechend errechnet sich für den zweiten Abstand $d\left(\overline{PQ}\right) = 4$. Da also die Abstände zwischen den Punktepaaren gleich sind und die Laufkatzen dieselbe Zeit benötigen, ist ihre Geschwindigkeit gleich.		15	
h)	Eingesetzt ergibt sich $d(t) = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 8-4t \\ -2+2t \end{pmatrix} \right\|$ $= \sqrt{(8-4t)^2 + (2t-2)^2}$ $= \sqrt{20t^2 - 72t + 68}$. Der Term von *d(t)* wird genau dann minimal, wenn der Radikand minimal wird. Notwendig dafür ist – mit $\mathrm{rad}(T) = 20t^2 - 72t + 68$ – , dass $\mathrm{rad}'(t_E) = 0$. Zu lösen ist also $40t_E - 72 = 0$. Die Lösung ist $t_E = 1{,}8$. Dieses t_E ist tatsächlich die gesuchte Minimalstelle von *d(t),* da *rad(t)* als ganzrationale Funktion 2. Grades genau ein Extrem hat und, da der Graph von *rad(t)* nach oben geöffnet ist, dies ein Minimum sein muss. Also ist der Zeitpunkt der größten Nähe der Laufkatzen 1.8 ZE nach Start, und die Positionen ergeben sich durch Einsetzen zu P_1 (1,8|4,4|3,8) und P_2 (1,8|3,6|2,2).		5 5	15
	Insgesamt 100 BWE	26	59	15

Aufgabe 6: Masten auf einem Berghang — Gy, GS, TG, WG

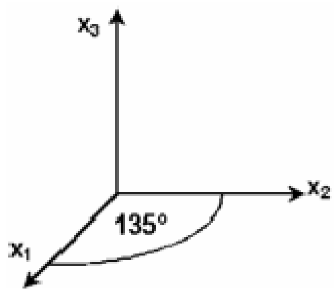
Diese Aufgabe basiert auf der Abituraufgabe G2 des Abiturjahrgangs 2001 aus Sachsen-Anhalt.

Aufgabenstellung

Auf einem schrägen, aber ebenen Berghang sollen in den Geländepunkten

$A\,(10 \mid 15 \mid 5)$, $B\,(-20 \mid 30 \mid 20)$ und $C\,(-5 \mid 0 \mid 5)$

zur Horizontalebene senkrechte Masten mit einer Länge von jeweils 10m errichtet werden. Entsprechend ihrem Standort werden sie mit *a*, *b* und *c* bezeichnet.



a) Stellen Sie die Punkte, die Masten und alle folgenden Angaben in einem Koordinatensystem dar. (1cm entspricht 5m; Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$)

b) Zeigen Sie, dass der Standort des Mastes *b* in gleicher Entfernung von den Standorten der Masten *a* und *c* gewählt wurde.
Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene ***E***, die die Lage des Berghanges beschreibt.

c) Ermitteln Sie jeweils die Koordinaten der Punkte *A'*, *B'* und *C'*, die die Lage der Spitzen der Masten *a*, *b* und *c* kennzeichnen.

[Teilergebnis zur Kontrolle: $A'\,(10 \mid 15 \mid 15)$]

An der Spitze des Mastes *b* soll ein Befestigungsseil angebracht werden, dessen Richtung durch den Vektor $\vec{v}_b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ beschrieben wird.

Stellen Sie eine Gleichung der Geraden *g* auf, die die Lage des Befestigungsseiles am Mast *b* beschreibt und berechnen Sie die Koordinaten des Verankerungspunktes *D* des Seiles in der Hangebene.

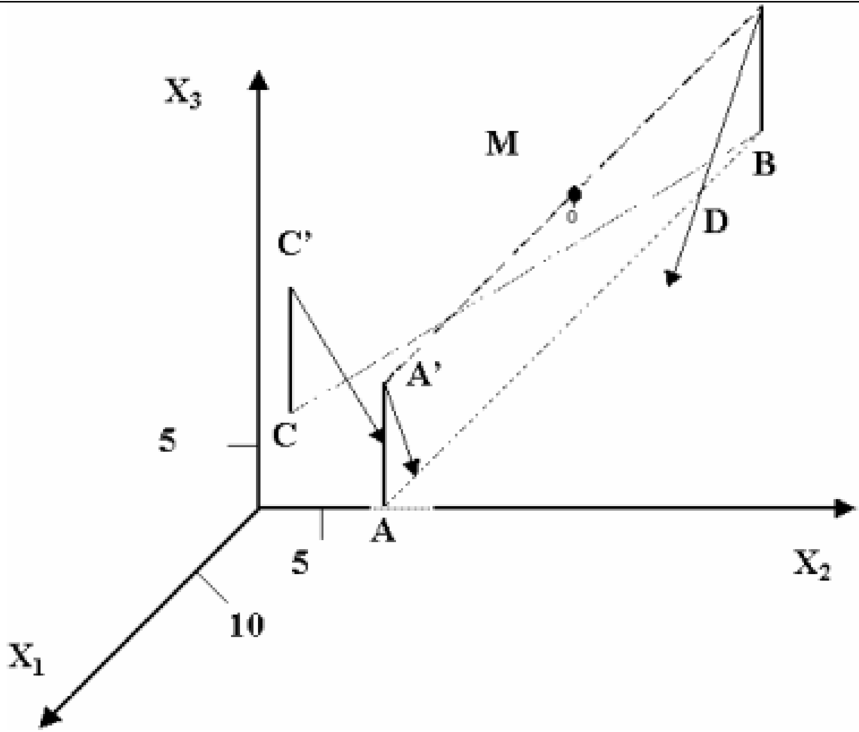
d) Die Befestigungsseile der Masten *a* und *c* sollen senkrecht zum Hang verlaufen. In den Bauunterlagen gibt es zu deren Richtung jedoch unterschiedliche Angaben:

$$\vec{v}_a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_c = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Beschreiben Sie zunächst das Verfahren, mit dem Sie überprüfen können, ob diese Vektoren die geforderte Richtung angeben und führen Sie die Rechnung durch.

e) Zwischen *A'* und *B'* soll eine Lampe aufgehängt werden. Berechnen Sie die Länge des Kabels, wenn das Kabel in *A* angeschlossen werden soll und die Lampe sich 2,5m senkrecht unterhalb des Mittelpunktes der Strecke von *A'B'* befindet. (Setzen Sie dabei voraus, dass die Seile so straff gespannt sind, dass sie nicht durchhängen können.) Runden Sie den Wert sinnvoll. Geben Sie die Koordinaten des Ortes der Lampe an.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung, Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>
</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Den Abstand zweier Punkte bestimmt man mittels der folgenden Beziehung: $\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$. Setzt man die angegebenen Koordinaten von A und B bzw. B und C ein, so erhält man jeweils den (gerundeten) Wert 36,74.

Um eine mögliche Parametergleichung der Ebene E zu erhalten, wählt man den Ortsvektor von B als Stützvektor und die jeweiligen Differenzen zwischen A und B bzw. zwischen C und B als Richtungsvektoren. Führt man die möglichen Vereinfachungen bei den Richtungsvektoren durch, so erhält man für die Ebene E folgende mögliche Darstellung:

$$\boldsymbol{E}\colon\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -20 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R}.$$</td><td>8</td><td>12</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Analog folgt: B' (–20 | 30 | 30) und C' (–5 | 0 | 15).

Da die beschriebene Gerade g durch B und in Richtung des angegebenen Vektors verläuft, lässt sie sich durch folgende Gleichung beschreiben:

$$\text{g:}\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -20 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}.$$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Um die Koordinaten des Verankerungspunktes zu bestimmen, berechnet man das Schnittgebilde der Geraden g und der Ebene E, das laut Voraussetzung ein Punkt sein soll.
Dazu muss man die Variablen r, s und u der folgenden Gleichung bestimmen:
$\begin{pmatrix}-20\\30\\20\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20\\30\\30\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}.$
Elementare Umformungen liefern folgende Werte:
$u = 3$, $s = 1$ und $r = 1$.
Damit hat der Verankerungspunkt die Koordinaten $D\,(-17 \mid 27 \mid 18\,)$.</td><td>10</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Wenn die Befestigungsseile senkrecht zum Hang verlaufen sollen, dann müssen die gegebenen Vektoren jeweils senkrecht zu den Richtungsvektoren der Ebene E verlaufen. Dieses ist dann der Fall, wenn die entsprechenden Skalarprodukte den Wert Null annehmen.
In Bezug auf den Mast a ist das Skalarprodukt einerseits 1 und andererseits 0, so dass das Befestigungsseil für den Mast a nicht senkrecht zum Hang verlaufen wird, für den Mast c erhält man in beiden Fällen für das Skalarprodukt den Wert 0, so dass hier die Voraussetzungen erfüllt sind.</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Um die Länge des Kabels zu bestimmen, halbiert man die Entfernung von A' nach B'. Man kann auch zunächst den Mittelpunkt zwischen A' und B' über das arithmetische Mittel der Koordinaten berechnen und erhält für M die Werte (–5|22,5|22,5). Mittels der in b) angegebenen Beziehung ist M (etwa) 18,37 m von A' entfernt. Da A von A' 10 m und M vom Ort der Lampe 2,5 m entfernt ist, beträgt die Summe aller Teilstücke etwa 30,87 m. Sinnvollerweise sollte das Kabel 31m lang sein.
Da die Lampe sich senkrecht unterhalb des Mittelpunktes M befinden soll, hat ihr Ort die Koordinaten (–5 | 22,5 | 20).</td><td></td><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>28</td><td>62</td><td>10</td></tr>
</table>

Aufgabe 7: In einer Weinhandlung Gy, GS, TG, WG

Aufgabenstellung

Die Weinhandlung Müller verkauft u.a. vier Sorten Wein, nämlich Aragoneser (A), Burgenländer (B), Chablis (C) und Deidesheimer (D).

An einem Tag wurden vier Käufe getätigt:
- Elena H. hatte sechs Flaschen A, sechs Flaschen D und je eine Flasche B und C gekauft - ihre Rechnung beläuft sich auf 200 Euro.
- Miriam K. erwarb eine Flasche A, drei Flaschen C, vier Flaschen D und sogar elf Flaschen B - sie ist mit 201 Euro dabei.
- Jessica C. hatte je drei Flaschen B und C sowie vier Flaschen D und fünf Flaschen A erworben und muss dafür 197 Euro zahlen.
- Vanessa G. schließlich muss für den Erwerb von sieben Flaschen D sowie je drei Flaschen der anderen Produkte 202 Euro bezahlen.

a) Begründen Sie, warum weder B noch D mehr als 30 € pro Flasche kosten kann.

b) Bestimmen Sie die Preise der vier Weine pro Flasche.

c) Leider unterliefen bei der Rechnungserstellung für Miriam K. Fehler. Es sind dort statt „1 A", dem tatsächlichen Kauf, „11 A" ausgewiesen, und ebenso war bei den D eine 1 zu viel: Es stand statt „4 D" auf der Rechnung „14 D". Als die Ladenbesitzerin die vier Rechnungen zusammen sah und etwas gerechnet hatte, fiel ihr auf, dass hier ein Fehler vorliegen musste. Ermitteln Sie: Welche Preise für die vier Produkte hatte die Ladenbesitzerin aus den vier Rechnungen errechnet? Begründen Sie, warum hier ein Fehler vorliegen musste.

d) Bestimmen Sie: Was hätte die Ladenbesitzerin über die Kosten der Produkte herausfinden können, wenn ihr die Rechnung von Miriam K. gar nicht vorgelegen hätte, sie also nur drei Rechnungen zur Verfügung gehabt hätte?

Denken wir die Sache einmal geometrisch. Streichen wir zunächst einmal die Sorte D aus dem Angebot der Firma; die Preise werden auch neu definiert.
Nun gab es drei Rechnungen:

- Carsten S. hatte vier Flaschen A, zwei Flaschen B und vier Flaschen C für insgesamt 98 € gekauft.
- Sven T. brauchte sechs Flaschen A, zwei Flaschen B und drei Flaschen C – Preis 99 €.
- Nico U. mochte keinen Wein B, dafür kaufte er aber drei Flaschen A und sechs Flaschen C und bezahlte 99 €.

e) Stellen Sie die Gleichungen auf und weisen Sie nach, dass sie durch folgende Preise gelöst werden. A: 7 €; B: 9 €; C: 13 €

f) Begründen Sie, dass die geometrische Interpretation jeder Rechnung eine Ebene ist, und ermitteln Sie die Schnittpunkte der Sven T.-Ebene mit den Koordinatenachsen. Was kann man aus diesen Schnittpunkten für die Frage nach den Rechnungen und den Preisen folgern?

g) Beschreiben Sie einen Lösungsweg für die Frage: Wie viele ganzzahlige Lösungen für die Preise von A, B und C lässt die Rechnung von Sven T. zu?

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Grundsätzlich sind alle Preise positiv. Weiterhin wurden bei einem Kauf einmal sieben Flaschen D (Vanessa G) und sogar einmal elf Flaschen B (Miriam K.) erworben – also kann der Einzelpreis dieser Flaschen höchstens $\frac{202}{7}$ € bzw. $\frac{201}{11}$ € betragen; beide Werte liegen unter 30 €.	15		
b)	Mit Hilfe von Standardverfahren (z.B. Gauß-Jordan) zur Lösung dieses 4x4-LGS ergibt sich: Ein A kostet 17 €, ein B 9 €, ein C 11 € und ein D 13 €. (Hinweis: Auf Grund der Aufgabenstellung sind hier Antworten mit ganzen Sätzen und Einheiten erforderlich.)		13	
c)	Dieses Gleichungssystem, genau so gelöst wie das bisherige, gibt für A und D dieselbe Lösung, also 17 € für den A und 13 € für das D. Die Lösung für B ist aber –28,50 €, und diese Zahl liegt – siehe a) – außerhalb des Bereichs möglicher Lösungen. Also: das LGS ist eindeutig lösbar, aber die Lösung zeigt, dass das LGS das Anfangsproblem nicht sinnvoll darstellt. Damit ist ein Fehler in der Rechnungsgestellung der vier Rechnungen klar. (Allerdings ist nicht zu bestimmen, welche der Rechnungen einen Fehler aufweist.)		15	
d)	Das Gleichungssystem ist nunmehr unterbestimmt. Es ergeben sich weiterhin die bekannten Preise für A und D, aber über B und C ist nur noch herauszufinden, dass ein B und ein C zusammen 20 € kosten. (Hinweis: „Normales“ Vorgehen allein macht es möglich, nicht dreimal das – nur leicht geänderte – Gleichungssystem durchrechnen zu müssen, sondern sozusagen nur die Änderungen „nachzurechnen“. Insofern ist die Effizienz beim Bearbeiten dieser Aufgabenteile durchaus ein Maß für die Güte der Bearbeitung.)		10	
e)	Die drei Gleichungen lauten: $CS: \quad 4A+2B+4C = 98$ $ST: \quad 6A+2B+3C = 99$ $NU: \quad 3A \qquad +6C = 99.$ Einsetzen zeigt die Richtigkeit der Lösung.	12		
f)	Jede Rechnung hat ja die Form $a\cdot A+b\cdot B+c\cdot C=e$ und ist damit als Koordinatendarstellung einer Ebene aufzufassen. Sei ST die Sven T.-Ebene; die Rechnung ergibt dann (s.o.) die Koordinatendarstellung $ST: \ 6A+2B+3C=99$. Die Achsenschnittstellen haben jeweils in zwei Koordinaten eine Null (z.B. $ST: \ 6\cdot A_S+0\cdot B+0\cdot C=99$), woraus sich unschwer die Achsenschnittstellen bestimmen lassen. Damit sind die drei Achsenschnittstellen $A_S=16{,}50$ €, $B_S=49{,}50$ €, $C_S=33$ €. (Hinweis: Der Weg über die Hesse'sche Normalform $ST: \ \frac{A}{\frac{99}{6}}+\frac{B}{\frac{99}{2}}+\frac{C}{\frac{99}{3}}=1$,	5	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	in der die Achsenschnittstellen explizit auftauchen, ist nicht erforderlich, aber einfach.) Die Rechnung von Sven T. allein zeigt: Die Flaschen A kosten höchstens 16,50 € das Stück, die Flaschen B höchstens 49,50 € pro Stück und die Flasche C pro Stück höchstens 33 €.		5	
g)	Hierfür ist es sinnvoll, die Koordinatenform nach einer Preisvariablen aufzulösen, z.B.: $ST:\ C = \frac{99-6A-2B}{3} = \frac{99-2B}{3} - 2A$. Für alle ganzzahligen Lösungen muss (99–2B) durch 3 teilbar sein, da der erste Summand ganz sein muss, um mit einer ganzen Zahl summiert wieder eine ganze Zahl zu ergeben. Damit muss auch B durch 3 teilbar sein. Da B (siehe f)) höchstens 49,5 sein kann, ist es möglich, für B die durch 3 teilbaren Zahlen zwischen 3 und 48 einzusetzen und zu prüfen, wie viele ganzzahlige Lösungen sich jeweils für A und C ergeben. (Hinweis: Dies lässt sich sogar mit einer Tabelle durchführen:			

B	$\frac{99-2B}{3}$	Bereich möglicher ganzer A-Werte, für die $\frac{99-2B}{3} - 2A \geq 1$	Zahl der möglichen Werte für C	Summe der Lösungen
3	31	15 .. 1	15	
6	29	14 .. 1	14	
9	27	13 .. 1	13	
12	25	12 .. 1	12	
...	...	...	...	
45	3	1 .. 1	1	
48	1	0	0	120

		I	II	III
	Es gibt also 120 ganzzahlig positive Lösungstripel für die Sven T.-Rechnung. Selbstverständlich ist dieses Arbeiten mit einer Tabelle durch Argumentation abkürzbar bzw. ersetzbar; aber selbst bei diesem Ansatz ist leicht zu sehen, dass die Zahl der Lösungstripel $\sum_{i=1}^{15} i = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120$ ist.)			15
	Insgesamt 100 BWE	32	53	15

Aufgabe 8: Durchstoßene Pyramide Gy, GS

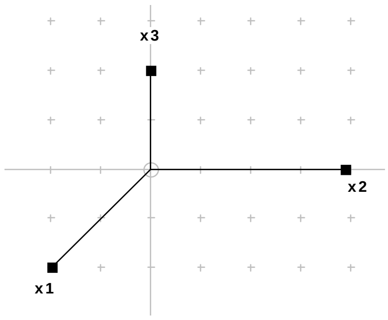
Diese Aufgabe entspricht bis einschließlich Teil d) der Abituraufgabe Grundkurs B 1 der Abiturprüfung 2001 aus Baden-Württemberg.

Aufgabenstellung

Die Ebene E wird durch die drei in ihr liegenden Punkte $A\ (1 \mid -1 \mid 1)$, $B\ (-3 \mid -3 \mid 4)$ und $C\ (3 \mid -3 \mid -2)$ definiert.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von $\boldsymbol{E}$.

b) Ermitteln Sie die Schnittpunkte S_1, S_2 und S_3 von $\boldsymbol{E}$ mit den Koordinatenachsen. Zeichnen Sie dieses Dreieck in ein Koordinatensystem ein. (Längeneinheit 1 cm; Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung $\frac{1}{2}\sqrt{2}$)
[Zur Kontrolle - $E: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$]



c) Zeigen Sie, dass das Dreieck $S_1S_2S_3$ gleichschenklig ist.

d) Das Dreieck $S_1S_2S_3$ bildet die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze $S\ (3{,}5 \mid -3 \mid 3{,}5)$. Bestimmen Sie das Volumen dieser Pyramide.

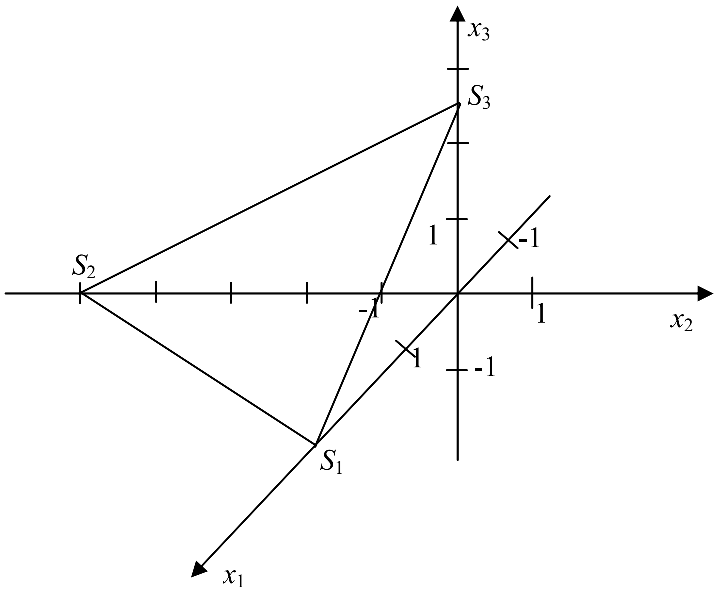
e) Entscheiden Sie, ob der Ursprung innerhalb oder außerhalb der Pyramide liegt.

Die Gerade g enthält den Ursprung und den Punkt S. Sie durchstößt die Grundfläche der Pyramide im Punkt T.

f) Zeigen Sie, dass die Gerade g nicht senkrecht auf der Grundfläche der Pyramide steht.

g) Untersuchen Sie, ob T der Umkreismittelpunkt des Dreiecks $S_1S_2S_3$ ist.

Erwartungshorizont

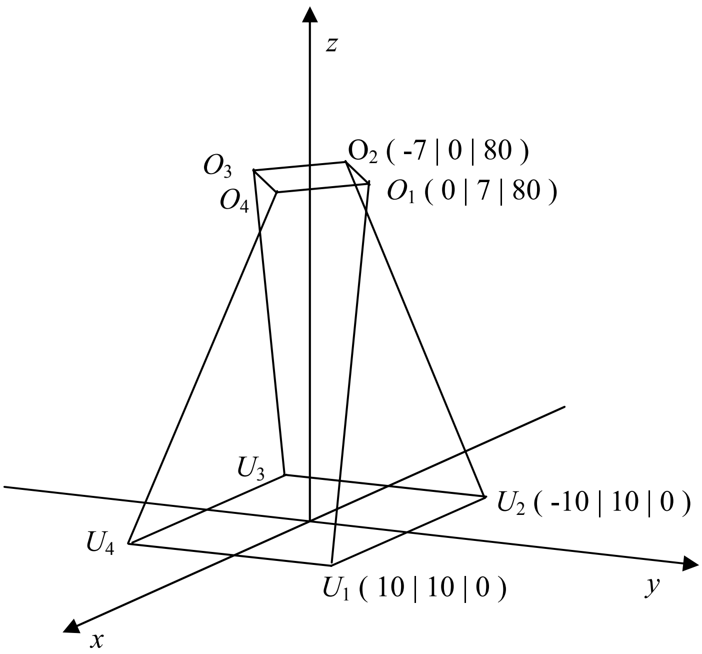
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Unmittelbar erhältlich ist eine Parameterdarstellung wie z.B. $E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-4\\-2\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-3\end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, woraus sich die angegebene Koordinatendarstellung $E:\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$ leicht errechnen lässt.	8		
b)	Mit $E:\ \frac{x_1}{\frac{5}{2}}+\frac{x_2}{\frac{-5}{1}}+\frac{x_3}{\frac{5}{2}}=1$ (oder durch jeweiliges Einsetzen von Null für je zwei Koordinaten) ergibt sich: S_1 (2,5 | 0 | 0), S_2 (0 | –5 | 0), S_3 (0 | 0 | 2,5). Zeichnung:  	7	5	
c)	Hier sind drei Abstände zu berechnen: $d(S_1S_2)=\sqrt{31{,}25}$; $d(S_1S_3)=\sqrt{12{,}5}$; $d(S_2S_3)=\sqrt{31{,}25}$. Da zwei dieser Abstände (oder Seitenlängen des Dreiecks) gleich sind, ist das Dreieck $S_1S_2S_3$ gleichschenklig, wobei S_2 zwischen den gleichen Schenkeln liegt. Hinweis: Das Dreieck ist nicht rechtwinklig! Der Winkel bei S_2 beträgt 36,87°.	5	5	
d)	Das Volumen der Pyramide lässt sich am einfachsten aus dem Spatprodukt dreier Vektoren bilden, die von einem Punkt der Pyramide ausgehen und die Kanten der Pyramide angeben. Zwei dieser Vektoren sind schon aus c) bekannt. Also $V=\frac{1}{6}\cdot\left\|\left(\overrightarrow{S_1S_2}\times\overrightarrow{S_1S_3}\right)\cdot\overrightarrow{S_1S}\right\|=12{,}5$. Die Pyramide hat ein Volumen von 12,5 (VE).	5	15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>e)</td><td>Wie die Zeichnung zeigt, liegt der Ursprung von S aus gesehen hinter der Ebene E, der Ursprung liegt also außerhalb der Pyramide.
Eine andere Argumentation verwendet die Koordinatendarstellung von E:
Setzt man die Koordinaten des Ursprungs in die rechte Seite des Terms ein, so erhält man 0; setzt man die Koordinaten von S ein, so erhält man 20. Da $0 < 5 < 20$, liegen der Ursprung und S auf entgegengesetzten Seiten von E.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Die Gerade g bestimmt sich z.B. zu $g: \vec{x} = \nu \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \nu \in \mathbb{R}$.
Wenn g senkrecht auf der Grundfläche und damit auf der Ebene E stehen würde, dann wäre das Skalarprodukt des Richtungsvektors von g mit jedem der beiden Richtungsvektoren der Ebene gleich Null. Es ergibt sich aber
$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$.
Damit ist die Prüfung des zweiten Skalarproduktes bereits überflüssig: g steht nicht senkrecht auf E.</td><td>5</td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>g)</td><td>Wenn T der Umkreismittelpunkt des Dreiecks wäre, so wäre der Abstand dieses Punktes zu den drei Eckpunkten gleich.
Nun ist aber $d(S_1T) = d(S_3T) \approx 1{,}604$ und $d(S_2T) \approx 2{,}100$.
Damit ist T nicht Umkreismittelpunkt des Dreiecks.</td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>50</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 9: Hafenturm **Gy, GS**

Aufgabenstellung

Einige Jahre lang war in Hamburg ein Hochhaus am Hafen im Gespräch, dessen grundsätzliche architektonische Idee in der nebenstehenden Zeichnung wiedergegeben ist, die allerdings in der z-Richtung nicht maßstäblich ist.



Diese Idee bildet die Grundlage für diese Aufgabe.

Jede Geschossfläche bildet ein Quadrat.

Die Mittelpunkte aller Quadrate liegen auf der *z*-Achse. Alle Geschossflächen sind parallel zur Grundebene. Die quadratischen Geschossflächen sind allerdings gedreht, und zwar so, dass die Verbindungslinie der entsprechenden Eckpunkte aller Geschossflächen auf einer Geraden liegt. Die Geschosshöhe beträgt 4 Einheiten.

In der Zeichnung sind die vier Eckpunkte des Grundgeschosses mit U_1, U_2, U_3 und U_4 angegeben, die des obersten Geschosses mit O_1, O_2, O_3 und O_4. Für je zwei dieser Punkte sind die Koordinaten gegeben.

a) Die Gerade g_1 verbindet die Punkte U_1 und O_1, die Gerade g_2 analog U_2 und O_2. Bestimmen Sie die beiden Geradengleichungen.

b) Welche Länge weisen die Kanten des Gebäudes jeweils auf?

c) Stellen Sie sich vor, die Konstruktion würde in der gleichen Weise nach oben weitergebaut werden. Würde das Gebäude in einer Spitze auslaufen? Begründen Sie.

d) Betrachten Sie jetzt das Geschoss bei $h = 40$, dessen Grundfläche wie bei allen Geschossen quadratisch ist. Ermitteln Sie deren Flächeninhalt.

e) Um welchen Winkel ist dieses mittlere Geschoss gegenüber dem Grundgeschoss gedreht?

f) „Zwei aufeinander folgende Geschosse sind immer um denselben Winkel weitergedreht.“ Entscheiden Sie, ob diese Aussage richtig ist.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die beiden Geradengleichungen ergeben sich aus jeweils zwei Punkten zu z.B. $g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-10\\-3\\80\end{pmatrix},\ \lambda\in\mathbb{R}$, und $g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-10\\10\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\-10\\80\end{pmatrix},\ \mu\in\mathbb{R}$.	10		
b)	Hier ist der Abstand des Grund- und des Dachpunktes auf einer Geraden zu bestimmen, z.B. $d\left(\overline{U_1O_1}\right)$. Es ergibt sich $d=\sqrt{6509}\approx 80{,}68$.	8	7	
c)	Würde der Turm in einer Spitze enden, so würden die Geraden zusammenlaufen und damit einen gemeinsamen Punkt aufweisen. Zu lösen ist also das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix}10\\10\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-10\\-3\\80\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\10\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\-10\\80\end{pmatrix}$ für λ und μ. Die letzte Zeile ergibt $\lambda = \mu$, und es zeigt sich leicht, dass das LGS keine Lösung aufweist. Der Turm endete also nicht in einer Spitze. Dieses Resultat ist noch schneller zu erhalten, wenn man sich klar macht, dass ein Spitzenpunkt $x = y = 0$ hätte. Die ersten beiden Zeilen jeder Geradengleichung zeigen sofort: Weder die Gerade g_1 noch die Gerade g_2 enthält einen solchen Punkt.		15	
d)	Um die Fläche des Quadrats zu berechnen, braucht man seine Kantenlänge. Um die Kantenlänge zu berechnen, braucht man die Koordinaten zweier Eckpunkte des Quadrats. Gesucht werden also die Punkte R_1 und R_2 auf g_1 bzw. g_2 mit $h = 40$. Diese Bedingung ergibt $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ und damit $R_1\,(5 \mid 8{,}5 \mid 40)$ und $R_2\,(-8{,}5 \mid 5 \mid 40)$. Der Abstand dieser beiden Punkte ergibt die Kantenlänge zu $k=\sqrt{194{,}5}$, und die Fläche ist damit $A = 194{,}5$.	2	10 10 3	
e)	Da hier Geschosse betrachtet werden, spielt die z-Koordinate keine Rolle – der Drehwinkel liegt in der x-y-Ebene. Die Verbindungslinie von U_1 zum Ursprung schließt mit der x-Achse einen Winkel von 45° ein. Die Verbindungslinie von R_1 zum Zentrum des Geschosses schließt mit der x-Achse den Winkel α ein, der sich bestimmen lässt durch $\alpha=\arctan\left(\frac{y_{R1}}{x_{R1}}\right)=$			

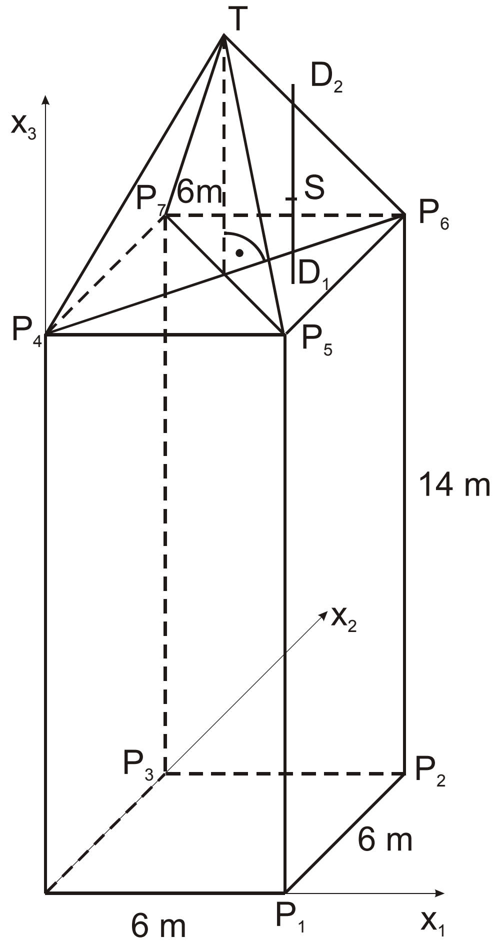
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$\arctan\left(\frac{8,5}{5}\right) \approx 59,53°$. Das mittlere Geschoss ist also um 14,53° gegenüber dem Grundgeschoss gedreht.		10	10
f)	Diese Aussage ist nicht richtig, wie aus e) folgt: Das unterste und das oberste Geschoss sind um 45° gegeneinander gedreht. Auf den ersten 11 Geschossen (bis zur Höhe 40) beträgt der Drehwinkel 14,53°. Also muss auf den verbleibenden 10 Flächen der Drehwinkel 30,47° betragen, was pro Geschoss deutlich mehr ist. Also wächst der Drehwinkel nicht konstant, wenn man von Geschoss zu Geschoss nach oben geht.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 10: Burghotel Gy, GS

Aufgabenstellung

Der Turm einer zu einem Hotelkomplex gehörenden ehemaligen Burg hat die Form einer senkrechten quadratischen Säule, der eine 6 m hohe Pyramide aufgesetzt ist.

Zur Bearbeitung der folgenden Aufgaben seien drei Kanten des Turmes auf die Koordinatenachsen gelegt: Der Burghof liegt in der horizontalen x_1x_2-Ebene (siehe Zeichnung).



a) Geben Sie eine Gleichung der Ebene ***E*** durch die Punkte P_4, P_5 und T an.

   [mögliches Ergebnis: $\boldsymbol{E}$: $-2x_2 + x_3 - 14 = 0$]

b) Bestimmen Sie den Winkel zwischen dem Fußboden des Daches $P_4P_5P_6P_7$ und der Dachfläche P_4P_5T.

c) Die Dachfläche P_4P_5T soll vollständig mit Sonnenkollektoren zur Warmwassererzeugung bedeckt werden. Bestimmen Sie das Flächenmaß dieser Fläche.

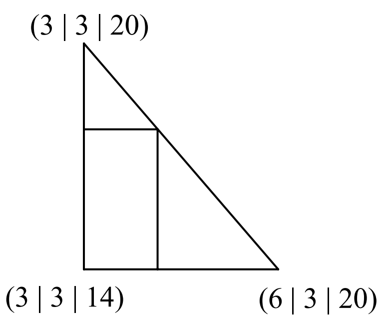
d) Der Dachständer D_1D_2 steht senkrecht auf dem Dachfußboden und durchstößt das Dach im Schwerpunkt der Dachfläche P_5P_6T. Er ist 5m lang.

   Wie hoch ragt die Spitze D_2 aus dem Dach heraus?

e) Im pyramidenförmigen Dachraum soll ein möglichst großer zylinderförmiger Wasserspeicher aufgestellt werden. Bestimmen Sie das Volumen des Zylinders.

f) Untersuchen Sie, ob zur Aufstellung des Wasserspeichers der Dachständer entfernt werden muss.

Erwartungshorizont

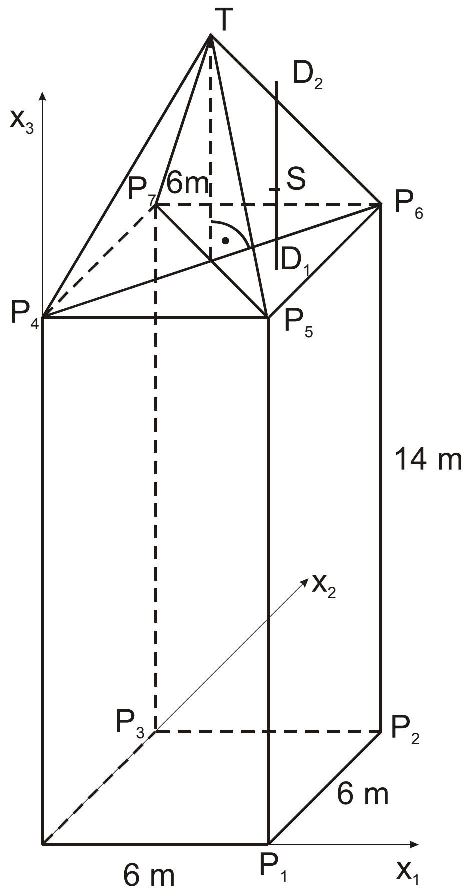
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Es gilt: $P_4\,(0\mid 0\mid 14)$, $P_5\,(6\mid 0\mid 14)$, $T\,(3\mid 3\mid 20)$. Eine Parameterform der Ebenengleichung von ***E***: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\14\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix},\quad r, s\in\mathbb{R}.$ Eine Koordinatenform der Ebenengleichung von ***E***: $-2x_2 + x_3 - 14 = 0$.	10		
b)	Mit Hilfe der Normalenvektoren $\vec{n_1} = \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ von ***E*** und $\vec{n_1} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ der zur x_1x_2-Ebene parallelen Ebene des Dachfußbodens und der Formel $\cos\alpha = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{\lvert\vec{n_1}\rvert\cdot\lvert\vec{n_2}\rvert}$ erhält man $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und somit $\alpha\approx 63{,}43°$.	15		
c)	Die Basis des gleichschenkligen Dreiecks beträgt 6 m; die Höhe ist der Abstand des Mittelpunktes der Basis $M\,(3\mid 0\mid 14)$ von T und beträgt $\sqrt{45}$ m. Der Flächeninhalt beträgt demnach ca. 20,125 m^2.	5	10	
d)	Der Schwerpunkt S des Dreiecks wird mit Hilfe der Gleichung $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OP_5} + \overrightarrow{OP_6} + \overrightarrow{OT}\right)$ berechnet. Es gilt $S\,(5\mid 3\mid 16)$. Da S senkrecht über D_1 liegt, gilt: D_1 hat die Koordinaten $(5\mid 3\mid 14)$. Demnach befinden sich 2 m des Dachständers unterhalb der Dachfläche, und 3 m ragen heraus.		10	10
e)	Skizze:  $f(x) = -2x + 6$ $V_{Zy} = \pi r^2 h$ $V(x) = \pi x^2(-2x+6)$ $V'(x) = -6\pi x\,(-x+2)$ $V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$ $V(0) = 0$, $V(2) = 8\pi$. Das Maximum liegt demnach bei $x = 2$. Das Zylindervolumen beträgt ca. 25,12 m^3.		20	10
f)	Mit einem Radius von 2m würde der Tank genau auf den Dachständer treffen.		10	
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

Aufgabe 11: Burghotel TG

Das Aufgabenbeispiel ist gekennzeichnet durch die Verknüpfung der Sachgebiete lineare Algebra / Analytische Geometrie und Analysis. Im ersten Aufgabenteil werden grundlegende Fertigkeiten aus dem Themenbereich Geraden- und Ebenengleichungen überprüft. Der zweite Aufgabenteil erfordert das Mathematisieren der beschriebenen Forderung sowie die Anwendung der Differenzialrechnung im Kontext des Falles.
Die Aufgabe entspricht mit Abänderungen der Aufgabe 10 auf S. 85.

Aufgabenstellung

Der Turm einer zu einem Hotelkomplex gehörenden ehemaligen Burg hat die Form einer senkrechten quadratischen Säule, der eine Pyramide aufgesetzt ist (siehe Zeichnung). Drei Kanten des Turms liegen auf den Koordinatenachsen, der Burghof liegt in der horizontalen x_1x_2-Ebene.



a1) Bestimmen Sie den Winkel zwischen dem Dachboden $P_4P_5P_6P_7$ und der Dachfläche P_6P_7T.

a2) Die Dachfläche P_4P_5T soll vollständig mit Sonnenkollektoren zur Warmwassererzeugung bedeckt werden.
Berechnen Sie die Dachfläche P_4P_5T.

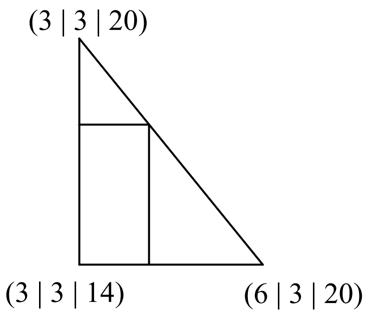
a3) Der Dachständer D_1D_2 mit der Länge 5m steht senkrecht auf dem Dachboden und durchstößt das Dach im Schwerpunkt der Dachfläche P_5P_6T.
Berechnen Sie, wie hoch die Spitze D_2 des Dachständers aus dem Dach herausragt.

b1) Im pyramidenförmigen Dachraum soll ein möglichst großer zylinderförmiger Wasserspeicher aufgestellt werden.
Bestimmen Sie Radius und Volumen des Wasserspeichers.

b2) Untersuchen Sie, ob zur Aufstellung des Wasserbehälters der Dachständer (siehe Teilaufgabe a3) entfernt werden muss.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	1. Aus der Zeichnung resultieren die Koordinaten der Eckpunkte des Turmes: $P_0(0 \mid 0 \mid 0)$, $P_1(6 \mid 0 \mid 0)$, $P_2(6 \mid 6 \mid 0)$, $P_3(0 \mid 6 \mid 0)$, $P_4(0 \mid 0 \mid 14)$, $P_5(6 \mid 0 \mid 14)$, $P_6(6 \mid 6 \mid 14)$, $P_7(0 \mid 6 \mid 14)$, $T(3 \mid 3 \mid 20)$ Winkelberechnung: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert} \qquad 0 \le \alpha \le 180^0$ $\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}}{\lvert 9\rvert \cdot \lvert 45\rvert} \approx 0{,}447 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 63{,}435^\circ$	20		
	2. Dachfläche: $A = \frac{1}{2}\left\lvert \overrightarrow{P_4P_5} \times \overrightarrow{P_4T} \right\rvert = \frac{1}{2}\left\lvert \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rvert = \frac{1}{2}\left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ 18 \end{pmatrix} \right\rvert = \frac{1}{2}\sqrt{36^2 + 18^2} = 20{,}125\,\mathrm{m}^2$	10	10	
	3. Schwerpunkt des Dreiecks P_5P_6T: $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP_5} + \overrightarrow{OP_6} + \overrightarrow{OT})$ $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 20 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 48 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(5 \mid 3 \mid 16)$ Da der Dachständer D_1D_2 parallel zur x_3-Achse verläuft und 5 m lang ist, können die Koordinaten von D_1 und D_2 aus den Koordinaten von S hergeleitet werden: $D_1(5 \mid 3 \mid 14)$; $D_2(5 \mid 3 \mid 19)$. Der Dachständer ragt folglich 3 m aus dem Dach heraus.		10	10

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung, Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>1. Skizze:


$f(x) = -2x + 6$
$V_{Zy} = \pi r^2 h$
$V(x) = \pi x^2 (-2x + 6)$
$V'(x) = -6\pi x (-x+2)$
$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

$V(0) = 0$, $V(2) = 8\pi$. Das Maximum liegt demnach bei $x = 2$.
Das Zylindervolumen beträgt ca. 25,133 m^3.</td><td></td><td>20</td><td>10</td></tr>
<tr><td></td><td>2. Mit einem Radius von 2m würde die Wand des Wasserspeichers genau auf den Dachständer treffen.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>30</td><td>50</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 12: Matrizen bei mehrstufigen Prozessen, Leontief-Modell WG

Die Aufgabe erfordert Kenntnisse aus dem Bereich Wirtschaft.

Aufgabenstellung

Ein Unternehmen besitzt drei Zweigwerke ZW_1, ZW_2 und ZW_3, in denen elektronische Bauteile hergestellt werden. Die drei Werke beliefern sich gegenseitig und selbstverständlich auch den Markt, so dass das Leontief-Modell angewendet werden kann.

Es gilt also die folgende Gleichung: $\vec{y} = \vec{x} - A \cdot \vec{x}$.

($\vec{y}$ = Absatzvektor, $\vec{x}$ = Produktionsvektor und A = Inputmatrix.)

a) Ermitteln Sie aus der obigen Matrizengleichung die nach $\vec{x}$ umgeformte Leontiefgleichung.

b) Gegeben ist die Inputmatrix: $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass die Leontief-Inverse wie folgt lautet: $(E - A)^{-1} = \frac{5}{18} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 10 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

c) Für das nächste Jahr wird nach einer Marktuntersuchung mit einem Absatz von $\vec{y}_{\text{neu}} = (18;36;54)^T$ gerechnet. Bestimmen Sie, mit welchem Produktionsvektor $\vec{x}_{\text{neu}}$ zu planen ist.

d) Das Verhältnis der Produktionsmengen der Zweigwerke ZW_1, ZW_2 und ZW_3 soll in den nächsten Jahren gleich bleibend 2:3:3 betragen.

d1) Bestimmen Sie den Absatzvektor $\vec{y}$, wenn im Zweigwerk ZW_3 180 ME produziert werden.

d2) Berechnen Sie die Produktionsmengen der Zweigwerke ZW_1, ZW_2 und ZW_3 und die Absatzmengen der Zweigwerke ZW_2 und ZW_3 für den Fall, dass das Zweigwerk ZW_1 genau 40 ME an den Markt abgibt.

e) Die Inputmatrix A hänge in Zukunft aufgrund veränderter Produktionsverfahren von den technischen Parametern s und t (mit $s,t \in$ R+) ab, und zwar wie folgt:

$$A_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & 0{,}2s \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}1t & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}.$$

e1) Untersuchen Sie, ob die Inverse zur Matrix $(E - A_{\text{neu}})$ für $s = 4{,}6$ und $t = 8$ existiert, und begründen Sie Ihr Ergebnis.

e2) Interpretieren Sie den Sachverhalt für die Fähigkeit des Unternehmens, jede Nachfrage befriedigen zu können.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>$y = x - A\cdot x$
$y = (E - A)\cdot x \;\big|\; (E - A)^{-1}$ [falls Inverse existiert!]
$(E - A)^{-1}\cdot y = x$</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Die angegebene Matrix ist genau dann Leontief-Inverse, wenn gilt:
$(E - A)^{-1}\cdot(E - A) = E$.

$$\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0,2&0,2&0,2\\0&0,6&0,2\\0,4&0&0,4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0,8&-0,2&-0,2\\0&0,4&-0,2\\-0,4&0&0,6\end{vmatrix}$$
$$\begin{array}{r|c|c} & (\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\bullet(\mathbf{E}-\mathbf{A}) = \mathbf{E} & \begin{matrix}0,8&-0,2&-0,2\\0&0,4&-0,2\\-0,4&0&0,6\end{matrix}\\ \hline \frac{5}{18}\bullet & \begin{matrix}6&3&3\\2&10&4\\4&2&8\end{matrix} & \begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\end{array}$$
Damit ist gezeigt, dass die gegebene Matrix die Leontief-Inverse ist.</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>$$\begin{array}{r|c|c} & (\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\bullet\mathbf{y}_{neu} = \mathbf{x}_{neu} & \begin{matrix}18\\36\\54\end{matrix}\\ \hline \frac{5}{18}\bullet & \begin{matrix}6&3&3\\2&10&4\\4&2&8\end{matrix} & \begin{matrix}105\\170\\160\end{matrix}\end{array}$$
Zu planen ist der Produktionsvektor $\mathbf{x}_{neu} = \begin{vmatrix}105\\170\\160\end{vmatrix}$</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>d</td><td>d1)
$$\mathbf{x} = \begin{vmatrix}2t\\3t\\3t\end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \begin{vmatrix}x_1\\x_2\\180\end{vmatrix} \quad \underset{(\,t = 60\,)}{\Leftrightarrow} \quad \mathbf{x} = \begin{vmatrix}120\\180\\180\end{vmatrix}$$
$$\begin{array}{c|c} (\mathbf{E}-\mathbf{A})\bullet\mathbf{x} = \mathbf{y} & \begin{matrix}120\\180\\180\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}0,8&-0,2&-0,2\\0&0,4&-0,2\\-0,4&0&0,6\end{matrix} & \begin{matrix}24\\36\\60\end{matrix}\end{array}$$
Der zugehörige Absatzvektor lautet: $\mathbf{y} = \begin{vmatrix}24\\36\\60\end{vmatrix}$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	d2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \\ 3t \end{pmatrix}$ und $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 40 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $(\mathbf{E} - \mathbf{A}) \bullet \mathbf{x} = \mathbf{y}$ $\begin{array}{ccc\|c} & & & 2t \\ & & & 3t \\ & & & 3t \\ \hline 0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}2 & \frac{2t}{5} \\ 0 & 0{,}4 & -0{,}2 & \frac{3t}{5} \\ -0{,}4 & 0 & 0{,}6 & t \end{array}$ Die Multiplikation führt zu einem Gleichungssystem: $\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2t}{5} \\ \frac{3t}{5} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} t = 100 \\ y_2 = 60 \\ y_3 = 100 \end{array}$ Die Produktionsmengen betragen von Zweigwerk ZW_1 200 ME, von ZW_2 und ZW_3 jeweils 300 ME. Die Absatzmengen der Zweigwerke lauten für ZW_2 60 ME und für ZW_3 100 ME.	5	20	10
e)	e1) $[(\mathbf{E} - \mathbf{A^*}) \mid \mathbf{E}] = \left(\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & -0{,}2 & -0{,}92 & 1 & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & -0{,}2 & 0 & 1 & 0 \\ -0{,}8 & -0{,}2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ $[\mathbf{B} \mid \mathbf{C}] = \left(\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & -0{,}2 & -0{,}92 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}8 & -1{,}32 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 5 \end{array} \right)$ Rg $\mathbf{B} = 2$ und Rg $\mathbf{C} = 3 \Rightarrow (\mathbf{E} - \mathbf{A^*})^{-1}$ existiert nicht. (oder ähnliche Begründung!) e2) Ein nach dem Leontief-Modell verbundenes Unternehmen kann nur dann jede denkbare Nachfrage befriedigen, wenn die Leontief-Inverse existiert. Das hier vorliegende Unternehmen ist demnach nicht in der Lage, bei einer Veränderung der Produktionsverfahren in Abhängigkeit von den Parametern s = 4,6 und t = 8 alle denkbaren Kundenwünsche zu erfüllen.		20	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 13: Matrizen bei mehrstufigen Prozessen, lineare Verflechtungen — WG

Die Aufgabe erfordert Kenntnisse aus dem Bereich Wirtschaft und aus dem Sachgebiet Analysis.

Aufgabenstellung

Ein Unternehmen der Metallindustrie verarbeitet in seinem Betrieb in einer ersten Stufe die Rohstoffe $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$, $\mathbf{R_3}$ und $\mathbf{R_4}$ zu den Zwischenprodukten $\mathbf{Z_1}$, $\mathbf{Z_2}$ und $\mathbf{Z_3}$. In einer zweiten Stufe werden aus den drei Zwischenprodukten die Endprodukte $\mathbf{E_1}$ und $\mathbf{E_2}$ hergestellt.
Die folgenden Tabellen zeigen, wie viele ME der Rohstoffe für eine ME eines Zwischenproduktes und wie viele ME der Zwischenprodukte für eine ME eines Endproduktes benötigt werden.

R→Z	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	8	2	0
R_2	2	3	0
R_3	0	5	10
R_4	2	0	6

Z→E	E_1	E_2
Z_1	3	0
Z_2	4	6
Z_3	1	2

a) Berechnen Sie die Rohstoff-/Endproduktmatrix **C**.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Matrizengleichungen pro Mengeneinheit (ME) der Endprodukte E_1 und E_2 die Rohstoffkosten ($\vec{k}_{Roh}$), die Herstellkosten der Zwischenprodukte ($\vec{k}_{Zwi}$) und die Gesamtkosten ($\vec{k}_{Ges}$). Verwenden Sie dazu die folgenden Angaben und beachten Sie die grundlegenden Gesetze der linearen Algebra.

- Kostenvektor für je eine ME der Rohstoffe in GE: $\vec{r}_K = \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{9} ; \frac{1}{5} ; \frac{1}{6} \right)$;
- Kostenvektor für die Herstellung je einer ME der Zwischenprodukte in GE: $\vec{z}_K = (4 ; 2 ; 5)$;
- Kostenvektor für die Herstellkosten je einer ME der Endprodukte in GE: $\vec{k}_{End} = (25 ; 10)$.

c) Die Verkaufserlöse für eine ME von E_1 betragen 175 GE und für eine ME von E_2 50 GE. An fixen Kosten entstehen für jeden Kundenauftrag 500 GE.

c1) Berechnen Sie für einen Kundenauftrag über 20 ME von E_1 und 190 ME von E_2 die Gesamtkosten, die Verkaufserlöse und den Gewinn.

c2) Die Auswertung von Kundenaufträgen sowie eine durchgeführte Marktanalyse ergab, dass zwischen der Höhe der Bestellmengen der einzelnen Endprodukte eine Relation besteht und zwar derart, dass t ME von E_1 zu $0{,}5t(t-1)$ ME von E_2 mit $t \in \mathbb{N}$ führen.

Zeigen Sie, dass der Gewinn für jeden Auftrag in Abhängigkeit von t wie folgt lautet: $G(t) = -t^2 + 100t - 500$, und bestimmen Sie den Parameter t so, dass der Gewinn je Kundenauftrag maximal wird. Geben Sie den maximalen Gewinn an.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>

$$\begin{array}{ccc|cc} & \mathbf{A \bullet B = C} & & 3 & 0 \\ & & & 4 & 6 \\ & & & 1 & 2 \\ \hline 8 & 2 & 0 & 32 & 12 \\ 2 & 3 & 0 & 18 & 18 \\ 0 & 5 & 10 & 30 & 50 \\ 2 & 0 & 6 & 12 & 12 \end{array} \qquad \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 32 & 12 \\ 18 & 18 \\ 30 & 50 \\ 12 & 12 \end{vmatrix}$$

</td><td>5</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>

$$\begin{array}{cccc|cc} & \vec{r}_K \bullet \mathrm{C} = \vec{k}_{Roh} & & & 32 & 12 \\ & & & & 18 & 18 \\ & & & & 30 & 50 \\ & & & & 12 & 12 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & 26 & 20 \end{array} \qquad \vec{k}_{Roh} = \begin{vmatrix} 26 & 20 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} & \vec{z}_K \bullet \mathrm{B} = \vec{k}_{Zwi} & & 3 & 0 \\ & & & 4 & 6 \\ & & & 1 & 2 \\ \hline 4 & 2 & 5 & 25 & 22 \end{array} \qquad \vec{k}_{Zwi} = \begin{vmatrix} 25 & 20 \end{vmatrix}$$

Gesamtkosten: $\vec{k}_{Ges} = \vec{k}_{Roh} + \vec{k}_{Zwi} + \vec{k}_{End} = (26;20) + (25;20) + (25;10)$
$= (76;52)$

Die Gesamtkosten betragen 76 GE pro ME von E_1 und 52 GE pro ME von E_2.

</td><td>5</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>c</td><td>

c1) $\text{Gewinn}_{\text{Auftrag}} = \text{Verkaufserlöse}_{\text{Auftrag}} - \text{Gesamtkosten}_{\text{Auftrag}}$

$$\begin{array}{cc|c} \vec{k}_{Ges} \bullet \vec{x} = \mathbf{K}_{\mathbf{Auf}} & & 20 \\ & & 190 \\ \hline 76 & 52 & 11.400 \end{array}$$

$\Rightarrow \text{Gesamtkosten}_{\text{Auftrag}} = 11.400 + 500 = 11.900$ GE

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

$$\begin{array}{rr|l} \vec{e} \bullet \vec{x} = E_{Auf} & & 20 \\ & & 190 \\ \hline 175 & 50 & 13.000 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Verkaufserlöse$_{\text{Auftrag}}$ = 13.000 GE

$\Rightarrow$ Gewinn$_{\text{Auftrag}}$ = 13.000 – 11.900 = 1.100 GE

c2)

$$\begin{array}{rr|l} \vec{k}_{Ges} \bullet \vec{x}_t = K_t & & t \\ & & 0{,}5t(t-1) \\ \hline 76 & 52 & 26t^2 + 50t \end{array}$$

$\Rightarrow$ Gesamtkosten$_{(t)}$ = $26t^2 + 50t + 500$

$$\begin{array}{rr|l} \vec{e} \bullet \vec{x}_t = E_t & & t \\ & & 0{,}5t(t-1) \\ \hline 175 & 50 & 25t^2 + 150t \end{array}$$

$\Rightarrow$ Verkaufserlöse$_{(t)}$ = $25t^2 + 150t$

$\Rightarrow$ Gewinn$_{(t)}$ = $G(t) = 25t^2 + 150t - (26t^2 + 50t + 500) = -t^2 + 100t - 500$

Gewinnmaximum: $G'(t) = 0 \wedge G''(t) < 0$

$G'(t) = -2t + 100$

$G''(t) = -2$

$-2t + 100 = 0 \Leftrightarrow t = 50$

$G''(50) = -2 < 0 \Rightarrow$ Maximalstelle in $t = 50$

$G(50) = 200$

Mit $G_{MAX}(50|200)$ liegt ein absolutes Maximum vor. Daher wird nur für $t = 50$ der Gewinn für jeden Kundenauftrag maximal und der zugehörige Gewinn beträgt 200 GE.

		I	II	III
		10	35	20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 14: Geraden- und Ebenengleichungen Gy, GS, TG, WG

Aufgabenstellung

Gegeben sind im Raum R^3 der Punkt $P(4 \mid 1 \mid 3)$, die Gerade g und die Ebene $\boldsymbol{E}_1$:

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R},$$

$$\boldsymbol{E}_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2 \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass der Punkt P nicht auf der Geraden g aber in der Ebene $\boldsymbol{E}_1$ liegt.

b) Untersuchen Sie die Lage der Geraden g zur Ebene $\boldsymbol{E}_1$, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt S.

c) Begründen Sie kurz, warum die Gerade g und der Punkt P eine zweite Ebene $\boldsymbol{E}_2$ aufspannen, und geben Sie deren vektorielle Gleichung an.

d) Gegeben ist eine Schar von Geraden h mit dem Parameter $k \in \mathbb{R}$:

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

d1) Berechnen Sie den Parameter k so, dass h parallel zu $\boldsymbol{E}_1$ verläuft.

d2) Untersuchen Sie die Behauptung, dass für $k = 1$ die Gerade h in der Ebene $\boldsymbol{E}_1$ liegt.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung, Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>a</td><td>
Der Ortsvektor des Punktes $\vec{o}_P$ darf nicht die Geradengleichung erfüllen, muss aber die Ebenengleichung erfüllen.

$P \notin g$?:

$$\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\9\\5\end{pmatrix} + a\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{lllll} 4 = 3+a & \Leftrightarrow & a = 1 \\ 1 = 9+a & \Leftrightarrow & a = -8 \\ 3 = 5+a & \Leftrightarrow & a = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{nicht erfüllbar} \Leftrightarrow P \notin g$$

$P \in \boldsymbol{E}_1$?:

$$\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + b_1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} + b_2\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} \text{I.} & 4 = 3-b_2 & \Leftrightarrow & b_2 = -1 \\ \text{II.} & 1 = 2+b_1+2b_2 & & \\ \text{III.} & 3 = -1+4b_1 & \Leftrightarrow & b_1 = 1 \end{array}$$

Die Erfüllbarkeit ergibt sich durch Einsetzen der Ergebnisse von $b_1 = 1$ und $b_2 = -1$ in II: $1 = 2+1-2 \Leftrightarrow 1 = 1$.

$\Rightarrow P \in \boldsymbol{E}_1$.
</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
In R^3 schneidet eine zu einer Ebene nicht parallel verlaufende Gerade die Ebene genau in einem Punkt.

1. $g \parallel \boldsymbol{E}_1 \Leftrightarrow$ Der Richtungsvektor der Geraden ist linear abhängig von beiden Richtungsvektoren der Ebene.

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = b_1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} + b_2\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll} \text{I.} & 1 = -b_2 & \Leftrightarrow & b_2 = -1 \\ \text{II.} & 1 = b_1+2b_2 & & \\ \text{III.} & 1 = 4b_1 & \Leftrightarrow & b_1 = 0{,}25 \end{array}$$

Die Nichterfüllbarkeit ergibt sich durch Einsetzen der Ergebnisse von $b_1 = 0{,}25$ und $b_2 = -1$ in II: $1 = 0{,}25-2 \Leftrightarrow 1 = -1{,}75$.

$\Rightarrow g$ ist nicht parallel zu $\boldsymbol{E}_1$.
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

2. $g = \boldsymbol{E}_1$:

$$\begin{pmatrix}3\\9\\5\end{pmatrix} + a\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + b_1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} + b_2\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I.} & 3+a &=& 3-b_2 \\ \text{II.} & 9+a &=& 2+b_1+2b_2 \\ \text{III.} & 5+a &=& -1+4b_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrclcrcl} \text{I.} & a &=& -b_2 & \Leftrightarrow & b_2 &=& -a \\ \text{II.} & a &=& -7+b_1+2b_2 \\ \text{III.} & a &=& -6+4b_1 & \Leftrightarrow & b_1 &=& 0{,}25a+1{,}5 \end{array}$$

Einsetzen von b_1 und b_2 in II.: $a = -7 + b_1 + 2b_2$
$a = -7 + 0{,}25a + 1{,}5 - 2a$
$a = -2$

Einsetzen von a in b_1 und b_2: $b_1 = 1$
$b_2 = 2$

Einsetzen von a in g oder von b_1 und b_2 in $\boldsymbol{E}$:

$$S_{g\cap E_1}: \ \vec{o}_S = \begin{pmatrix}3\\9\\5\end{pmatrix} + (-2)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{o}_S = \begin{pmatrix}1\\7\\3\end{pmatrix} \Rightarrow S_{g\cap E_1}(\,1\mid 7\mid 3\,)$$

</td><td>5</td><td>30</td><td>5</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Eine Ebene wird auch durch drei Punkte eines Raumes festgelegt, die nicht auf einer Geraden liegen. Zwei verschiedene Punkte legen eine Gerade fest. Da der Punkt P nicht auf der Geraden g liegt, spannen g und P also eine Ebene auf. Der 1. Richtungsvektor der Ebene ist der Richtungsvektor der Geraden, der 2. Richtungsvektor ist der Vektor vom Aufpunkt der Geraden zum Punkt P und als Aufpunkt der Ebene wird der Aufpunkt der Geraden oder der Punkt P genommen.

Hieraus ergibt sich u.a. die folgende Gleichung von $\boldsymbol{E}_2$:

$$\boldsymbol{E}_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} + c_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\cdot\begin{pmatrix}1\\-8\\-2\end{pmatrix}.$$

</td><td>5</td><td></td><td>10</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d</td><td>

d1) $h \parallel \boldsymbol{E}_1 \;\Leftrightarrow\;$ Der Richtungsvektor der Geraden ist linear abhängig von beiden Richtungsvektoren der Ebene.

$$\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = b_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. $k = -b_2 \quad \Leftrightarrow \quad b_2 = -k$
II. $0 = b_1 + 2b_2$
III. $8 = 4b_1 \quad \Leftrightarrow \quad b_1 = 2$

Die Erfüllbarkeit ergibt sich durch Einsetzen des Ergebnisse von $b_1 = 2$ in II: $0 = 2 + 2b_2 \;\Leftrightarrow\; b_2 = -1$.
$\Rightarrow \; k = 1$.

Für $k = -1$ verläuft h parallel zu $\boldsymbol{E}_1$.

d2) $h \subset \boldsymbol{E}_1 \;\Leftrightarrow\;$ Der Richtungsvektor der Geraden h ist linear abhängig von beiden Richtungsvektoren der Ebene und ein Punkt der Geraden liegt in $\boldsymbol{E}$. Also muss der Ortsvektor der Geraden h die Ebenengleichung erfüllen:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

I. $4 = 3 - b_2 \quad \Leftrightarrow \quad b_2 = -1$
II. $1 = 2 + b_1 + 2b_2$
III. $3 = -1 + 4b_1 \quad \Leftrightarrow \quad b_1 = 1$

Die Erfüllbarkeit ergibt sich durch Einsetzen der Ergebnisse von $b_1 = 1$ und $b_2 = -1$ in II: $1 = 2 + 1 - 2 \;\Leftrightarrow\; 1 = 1$.

$\Rightarrow \; h \subset \boldsymbol{E}$.

<u>*oder:*</u>

Da der Aufpunkt der Geraden h identisch mit dem gegebenen Punkt P ist und in Teilaufgabe 1 schon gezeigt wurde, dass der Punkt P in der Ebene $\boldsymbol{E}_1$ liegt, lässt sich unmittelbar folgern, das für $k = 1$ die Gerade h in der Ebene $\boldsymbol{E}_1$ liegt.

</td><td></td><td>20</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

4.1.3 Stochastik

Aufgabe 1: Kunden eines Autoproduzenten Gy, GS, TG, WG

Die Modellierung soll zu einem Baumdiagramm und Anwendungen der Binomialverteilung führen, und es soll eine Simulation angegeben werden.
Die Aufgabe entspricht mit kleinen Veränderungen einer Aufgabe aus dem Zentralabitur 1999/2000 in Sachsen.

Aufgabenstellung

Ein Autoproduzent, der Kleinwagen, Mittelklassewagen und Luxuslimousinen herstellt, untersucht das Kaufverhalten seiner Kunden. Dabei wird ermittelt, dass 70% der Kunden einen Kleinwagen, 20% einen Mittelklassewagen und 10% eine Luxuslimousine kaufen. Beim Kleinwagen entscheiden sich $\frac{1}{5}$ der Kunden, beim Mittelklassewagen $\frac{1}{4}$ und bei der Luxuslimousine $\frac{11}{20}$ für eine Klimaanlage.

Das Kaufverhalten der Kunden ist voneinander unabhängig.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

Ereignis A: Ein zufällig ausgewählter Kunde fährt ein Fahrzeug mit Klimaanlage.

Ereignis B: Ein zufällig ausgewählter Kunde fährt einen Mittelklassewagen ohne Klimaanlage.

Ereignis C: Ein zufällig ausgewählter Kunde fährt eine Luxuslimousine oder ein Fahrzeug mit Klimaanlage.

b) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Personen unter 5 zufällig ausgewählten Kunden des Herstellers, die einen Kleinwagen fahren. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und den Erwartungswert der Zufallsgröße X.

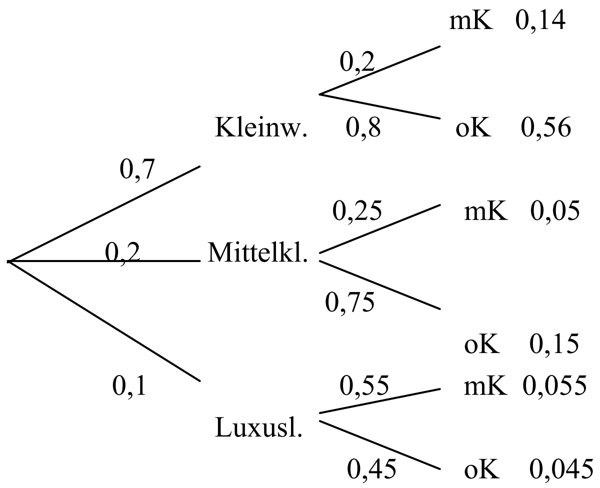
c) Zur Eröffnung eines neuen Autohauses des Herstellers werden 29 Gäste gezählt, von denen genau fünf schon einen Wagen dieses Herstellers fahren. In einer Tombola werden unter den 29 Gästen 7 Gewinner ermittelt, wobei jeder Gast nur genau einmal gewinnen kann. Das Ereignis D sei das Ereignis, dass sich unter den 7 Gewinnern genau zwei befinden, die bereits einen Wagen dieses Herstellers fahren.

Beschreiben Sie, wie man mithilfe einer Simulation (z.B. einem Urnenexperiment) einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses D ermitteln kann.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses D.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Zum Beispiel kann ein Baumdiagramm zur Lösung führen oder es können entsprechende Überlegungen zu den angegebenen bedingten Wahrscheinlichkeiten durchgeführt werden.



Man ersieht:
$P(A) = 0{,}14+0{,}05+0{,}055 = 0{,}245$; $P(B) = 0{,}15$; $P(C) = 0{,}245 + 0{,}045 = 0{,}29$.</td><td>20</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Die Auswahl der 5 Personen beschreibt ein Bernoulli-Experiment der Länge 5, so dass eine Binomialverteilung für X mit $p = 0{,}7$ angesetzt wird.
<table>
<tr><td>K</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>P(X=K)</td><td>0,0024</td><td>0,0284</td><td>0,1323</td><td>0,3087</td><td>0,3602</td><td>0,1681</td></tr>
</table>
Der Erwartungswert ist $E(X) = n \cdot p = 3{,}5$.</td><td>5</td><td>25</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Aus einer Urne mit 29 Kugel werden ohne Zurücklegen 7 Kugeln gezogen. Die Urne enthalte 5 gelbe Kugeln für die Gäste, die bereits einen Wagen des Herstellers fahren, und 24 schwarze Kugeln für die übrigen Gäste.
Nach der Ziehung wird festgestellt, wie viele der gezogenen Kugeln gelb sind. Nach hinreichend großer Anzahl von Ziehungen ist die ermittelte relative Häufigkeit für genau zwei gezogene gelbe Kugeln ein geeigneter Schätzwert für die interessierende Wahrscheinlichkeit.</td><td></td><td>5</td><td>15</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Da es sich um ein Laplace-Experiment handelt, ergibt sich z.B. unter Benutzung der Urnenmodelle: $$P(D) = \frac{\binom{5}{2}\binom{24}{5}}{\binom{29}{7}} = 0,2723.$$	5	15	
	Insgesamt 100 BWE	30	55	15

Aufgabe 2: Glücksspiele Gy, GS, TG, WG

Aufgabenstellung

Susanne, Henriette und Franziska bereiten eine Veranstaltung der Arbeitsgemeinschaft Mathematik ihrer Schule zum Thema Glücksspiele vor. Sie einigen sich darauf, dass sich jede ein Zufallsexperiment ausdenkt und bezüglich dieses Experimentes Aufgaben formuliert.

a) Susanne verwendet eine Urne, in der sich vier weiße, fünf schwarze und drei gelbe Kugeln befinden. Nacheinander sollen aus der Urne zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden. Susanne vermutet, dass von den folgenden Ereignissen das Ereignis B am wahrscheinlichsten ist.

   Ereignis A: Die erste Kugel ist gelb, die zweite ist schwarz.

   Ereignis B: Beide Kugeln haben die gleiche Farbe.

   Ereignis C: Keine der gezogenen Kugeln ist schwarz.

   Überprüfen Sie rechnerisch, ob Susannes Vermutung stimmt.

b) Henriette verwendet einen idealen Tetraeder, dessen Seiten mit „1“, „2“, „3“ bzw. „4“ beschriftet sind. Der Tetraeder soll pro Spiel dreimal geworfen werden, wobei nach jedem Wurf die unten liegende Augenzahl notiert wird.
   Erreicht der Spieler eine Augensumme größer als acht, bekommt er 0,50 € ausbezahlt. Anderenfalls muss er 0,25 € bezahlen.
   Die Zufallsgröße X beschreibe den Gewinn des Spielers. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an und berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X.

c) Franziska benutzt sieben Spielkarten und zwar vier Buben und drei Damen. Aus dem Stapel dieser sieben Karten wird durch einen Spieler dreimal eine Karte gezogen, wobei nach jeder Ziehung diese Karte zurückgelegt und die Karten neu gemischt werden.
   Betrachtet werden die Ereignisse:

   Ereignis E: Es werden zwei Damen und ein Bube (egal in welcher Reihenfolge) gezogen.

   Ereignis F: Es werden entweder drei Damen oder drei Buben gezogen.

   Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse E und F.

   Nach dem Ziehen der ersten Karte darf der Spieler auf eines der beiden Ereignisse E oder F wetten. Tritt dies ein, erhält der Spieler einen Gewinn von 2 €. Beschreiben Sie eine Strategie, die Sie dem Spieler raten würden.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung, Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>

$P(A)=\frac{3}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{5}{44}\approx 11{,}4\%$

$P(B)=\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11}+\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}+\frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11}=\frac{19}{66}\approx 28{,}8\%$

$P(C)=\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11}=\frac{7}{22}\approx 31{,}8\%$

Susannes Vermutung ist falsch, C ist am wahrscheinlichsten.
</td><td>15</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
<table>
<tr><td>Augensumme A</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
<tr><td>p(A)</td><td>$\frac{1}{64}$</td><td>$\frac{3}{64}$</td><td>$\frac{6}{64}$</td><td>$\frac{10}{64}$</td><td>$\frac{12}{64}$</td><td>$\frac{12}{64}$</td><td>$\frac{10}{64}$</td><td>$\frac{6}{64}$</td><td>$\frac{3}{64}$</td><td>$\frac{1}{64}$</td></tr>
</table>

Verteilung von X:

<table>
<tr><td>g</td><td>0,50 €</td><td>–0,25 €</td></tr>
<tr><td>P(X=g)</td><td>$\frac{20}{64}$</td><td>$\frac{44}{64}$</td></tr>
</table>

$E(X)=-\frac{1}{64}$ € $\approx -0{,}02$ € s = $\sqrt{\frac{495}{4096}}$ € $\approx 0{,}347\ldots$ €
</td><td>10</td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

$P(E)=3\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^2\cdot\frac{4}{7}=\frac{72}{343}\approx 31{,}5\%$

$P(F)=\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^3=\frac{13}{49}\approx 26{,}5\%$

$P(E\mid Bu)=\left(\frac{3}{7}\right)^2=\frac{9}{49}\approx 18{,}4\%$

$P(F\mid Bu)=\left(\frac{4}{7}\right)^2=\frac{16}{49}\approx 32{,}7\%$

$P(E\mid Da)=2\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}=\frac{24}{49}\approx 50\%$

$P(F\mid Da)=\left(\frac{3}{7}\right)^2=\frac{9}{49}\approx 18{,}4\%$

Falls die erste Karte ein Bube ist, sollte man also auf F wetten, sonst auf E.
</td><td>10</td><td>15</td><td>20</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>35</td><td>45</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 3: Spezialwürfel Gy, GS, TG, WG

Aufgabenstellung

Ein Würfel ist so verändert, dass das Auftreten der Augenzahl 2, 3, 4, 5 und 6 dem 2-, 3-, 4-, 5- bzw. 6-fachen der Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 1 entspricht. Dieser so veränderte Würfel heißt Spezial-Würfel, kurz: S-Würfel.
Die Zufallsgröße X gebe die Augenzahl beim Werfen des Würfels an.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit dem Erwartungswert der Zufallsgröße X.

[Zur Kontrolle: $P(„1“) = \frac{1}{21}$]

b) Jemand wittert ein großes Geschäft und bietet mit diesem S-Würfel ein Glücksspiel an:
Bei einem Einsatz von 4 € dürfen zwei S-Würfel geworfen werden. Ist die Augensumme größer als 9, wird die Summe der Augenzahlen in Euro ausgezahlt.
Lohnt sich dieses Spiel für den Anbieter?

Bei einem Würfelspiel mit dem S-Würfel benötigt man eine „6“, um das Spiel beginnen zu dürfen. Jeder Mitspieler darf in jeder Runde bis zu dreimal würfeln, bis die „6“ kommt, um damit das eigentliche Spiel beginnen zu können.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Spieler, bereits in der ersten Runde mit dem eigentlichen Spiel beginnen zu dürfen?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach drei Runden immer noch nicht im Spiel zu sein?

e) Wie oft müsste man überhaupt würfeln, damit man mit wenigstens 98% Wahrscheinlichkeit mindestens eine „6“ bekommt?

f) Jemand vermutet, dass bei einem Würfelspiel, wie z.B. *Mensch ärgere dich nicht*, an Stelle eines normalen Laplace-Würfels (kurz: L-Würfel) ein S-Würfel verwendet wurde.
Da man äußerlich die beiden Würfeltypen nicht unterscheiden kann, überlegt er, wie man das prüfen kann und entscheidet sich für folgendes Testverfahren:
Er würfelt 100-mal und notiert sich die Anzahl Z der geworfenen „3er“. Weicht die Anzahl Z um mehr als 4 vom Erwartungswert für L-Würfel nach unten ab, so bewertet er den Würfel als S-Würfel.

f1) Wenn es tatsächlich ein L-Würfel ist, mit welcher Wahrscheinlichkeit bewertet er den Würfel irrtümlich für einen S-Würfel?

f2) Wenn es ein S-Würfel ist, mit welcher Wahrscheinlichkeit bewertet er den Würfel dennoch nicht als S-Würfel?

f3) Beurteilen Sie das Testverfahren. Welche Möglichkeiten gibt es, das Verfahren zu verbessern?

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	siehe unten	15		
b)	siehe unten	10	5	
c)	siehe unten		10	

a) Ist X die Augenzahl und p die Wahrscheinlichkeit für die „1“, dann gilt:

$$p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich mit $p = \frac{1}{21}$ folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

Der Erwartungswert ergibt sich zu $E(X) = \dfrac{1+4+9+16+25+36}{21} \approx 4{,}3.$ — 15 (I)

b) Im Gewinnspiel ergibt sich folgende Zufallsgröße Y (Reingewinn):

Gewinnergebnisse	Reingewinn Y in €
(6;4), (4;6)	6
(5;5)	6
(5;6), (6;5)	7
(6;6)	8

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y wird in folgender Tabelle zusammengestellt.

k	6	7	8	–4
P(Y=k)	0,165	0,136	0,082	0,617

Die Wahrscheinlichkeiten berechnen sich wie folgt (Beispiel):

$$P(Y=6) = \frac{6\cdot 4}{21^2}\cdot 2 + \frac{5^2}{21^2} = \frac{73}{441} \approx 0{,}165.$$

Der Erwartungswert des Spiels ergibt sich damit zu

$$E(Y) = k_1\cdot P(Y=k_1) + \ldots + k_4\cdot P(Y=k_4)$$

$$E(Y) = 6\cdot 0{,}165 + 7\cdot 0{,}136 + 8\cdot 0{,}082 - 4\cdot 0{,}617 = 0{,}13.$$

Das Spiel lohnt sich also langfristig für den Spieler. — 10 (I), 5 (II)

c) X: „Anzahl der Sechsen“ ist binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{6}{21}$ und einer Kettenlänge $n = 3$

$$P(X\leq 1) = 1 - \mathrm{P}(Y=0)$$

$$= 1 - \left(\frac{15}{21}\right)^3$$

$$P(X\leq 1) \approx 0{,}636.$$ — 10 (II)

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Trefferwahrscheinlichkeit der Zufallsgröße Z: „Anzahl der Runden ohne Sechs“ für eine Runde beträgt $p = 1 - 0{,}636 = 0{,}364$. $P(Z{=}3) = 0{,}364^3 \approx 0{,}048$ oder auch: $P(Z{=}3) = (1-\frac{6}{21})^9 \approx 0{,}048$. Die Wahrscheinlichkeit, nach drei Runden noch immer nicht ins Spiel gekommen zu sein, beträgt ca. 5%.		10	
e)	$P(X \geq 1) \geq 0{,}98 \qquad 1 - P(X{=}0) \geq 0{,}98$ $1 - \left(\frac{15}{21}\right)^n \geq 0{,}98$ $n \geq \frac{\log 0{,}02}{\log 15 - \log 21}$ $n \geq 11{,}6$ d.h., man muss mindestens 12-mal würfeln, um mit mindestens 98% Wahrscheinlichkeit mindestens eine 6 zu bekommen.		10	
f1)	Die Drei fällt beim L-Würfel mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$, beim S-Würfel mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{7}$. Z: „Anzahl der Dreien“ ist mit $n = 100$ und einer Trefferwahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{6}$ (L -Würfel) binomialverteilt. Entscheidend ist die Abweichung der Zufallsgröße Z nach unten, daher müsste berechnet werden: $P(Z \leq 12) \approx 0{,}1297$. (entnommen aus einer Wertetabelle für kumulierte Binomialwahrscheinlichkeiten.) Mit einer Wahrscheinlichkeit von fast 13 % bewertet er einen L-Würfel irrtümlich als S-Würfel.		5	5
f2)	Z: „Anzahl der Dreien“ ist mit $n = 100$ und einer Trefferwahrscheinlichkeit von $p = \frac{1}{7}$ (S -Würfel) binomialverteilt. $P(Z>12) = 1 - P(Z \leq 12) \approx 0{,}686$ (**Achtung**: In einschlägigen Tabellen kumulierter Binomialwahrscheinlichkeiten ist diese Wahrscheinlichkeit nicht zu entnehmen, da für $p = \frac{1}{7}$ i.a. keine Rubrik vorhanden ist. Abhilfe: Vorgabe einer vom Lehrer bzw der Lehrerin selbst erstellten Tabelle oder man verlangt ersatzweise nur eine **sehr grobe** Abschätzung.) Wenn es tatsächlich ein S-Würfel ist, bewertet er dennoch mit einer Wahrscheinlichkeit von fast 70% den Würfel nicht als S-Würfel.		5	10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f3)	Das Testverfahren „entdeckt“ gefälschte Würfel selten. Das liegt daran, dass die Trefferwahrscheinlichkeiten relativ dicht beieinander liegen. Das Verfahren lässt sich durch folgende Maßnahmen verbessern: • Anzahl *n* der Versuche erhöhen und gleichzeitig die Entscheidungsgrenze geeignet ändern. • Statt der Anzahl der Dreien könnte man die Anzahl der Sechsen oder Einsen prüfen, da die zugehörigen Trefferwahrscheinlichkeiten weiter auseinander liegen.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 4: Flugbuchungen Gy, GS, TG, WG

Aufgabenstellung

Auf einer bestimmten Strecke verwendet eine Fluggesellschaft Flugzeuge mit 100 Plätzen. Die Belegungsstatistik weist aus, dass die Flüge auf dieser Strecke vorab stets ausgebucht sind. Allerdings werden dann im Mittel 10% der gebuchten Plätze kurzfristig storniert.

Für die Fluggesellschaft ist die Anzahl der Passagiere von Interesse, die bei Schließung der Passagierliste den Flug tatsächlich antreten wollen.

a) Unter welchen Annahmen sind die möglichen Anzahlen dieser Passagiere binomialverteilt?
Nennen Sie Fälle, in denen diese Annahmen nicht zutreffen.

Im Folgenden wird angenommen, dass die möglichen Anzahlen dieser Passagiere binomialverteilt sind. Durch eine Person, die tatsächlich fliegt, nimmt die Fluggesellschaft 200 € ein, bei einer Stornierung nur 100 €.

b) Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass beim nächsten Flug
- genau 84 Plätze,
- höchstens 84 Plätze,
- mindestens 90 Plätze tatsächlich genutzt werden?

c) Welche Einnahmen kann die Fluggesellschaft pro Flug erwarten?

Um die Flugzeuge besser auszulasten, bietet die Fluggesellschaft stets 8% mehr Plätze als verfügbar zum Verkauf an. Da auch diese Plätze alle im Voraus gebucht werden, geht die Fluggesellschaft damit das Risiko einer Überbuchung ein.
Für jeden Fluggast, der wegen Überbuchung abgewiesen werden muss, entstehen der Fluggesellschaft Kosten (negative Einnahmen) in Höhe von 1000 €.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es zu Überbuchungen kommt?

e) Wie groß sind die Einnahmen der Fluggesellschaft, wenn bei Schließung der Passagierliste genau 105 Personen den Flug antreten möchten?

f) Formulieren Sie einen Term, mit dem sich berechnen lässt, welche Einnahmen die Fluggesellschaft pro Flug erwarten kann.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Der Sachverhalt wird wie folgt modelliert: Es wird angenommen, dass jeder der n Kunden, der ein Flugticket gekauft hat, den Flug mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils 0,9 unabhängig von der Entscheidung aller anderen Kunden tatsächlich antritt. Damit wird der Sachverhalt durch eine Bernoulli-Kette der Länge n mit dem Parameter $p = 0{,}9$ beschrieben. Die Annahmen treffen z.B. dann nicht zu, wenn - die Wahrscheinlichkeit einer Stornierung bei verschiedenen Kunden oder Kundengruppen (z.B. Geschäfts- und Privatkunden) unterschiedlich ist, - eine ganze Gruppe wegen Krankheit eines einzelnen Mitgliedes storniert oder wenn mehrere Stornierungen auf Grund höherer Gewalt im Zielgebiet erfolgen.		10	
b)	X: Anzahl der tatsächlich genutzten Plätze X ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0{,}9$ $P(X = 84) = B(100;0{,}9;84) \approx 1{,}9\%$ $P(X \le 84) = \sum_{k=0}^{84} B(100;0{,}9;k) \approx 4{,}0\%$ $P(X \ge 90) = \sum_{k=90}^{100} B(100;0{,}9;k) \approx 58{,}3\%$	20		
c)	Erwartungswert der Einnahmen in €: $E = 200 \cdot 90 + 100 \cdot 10 = 19\,000$.		10	
d)	Y: Anzahl der Passagiere, die den Flug tatsächlich antreten wollen Y ist binomialverteilt mit $n = 108$ und $p = 0{,}9$. $P(Y \ge 101) = \sum_{k=101}^{108} B(108;0{,}9;k) \approx 14{,}3\%$.	5	15	
e)	Einnahmen im Fall $Y = 105$ in €: $100 \cdot 200 + 3 \cdot 100 - 5 \cdot 1000 = 15\,300$.	10		
f)	Erwartungswert der Einnahmen in €: $E = T_1 + T_2 = \sum_{k=0}^{100} \big(k \cdot 200 + (108-k) \cdot 100\big) \cdot B(108;0{,}9;k) +$ $\sum_{k=101}^{108} \big(100 \cdot 200 + (108-k) \cdot 100 - (k-100) \cdot 1000\big) \cdot B(108;0{,}9;k)$. T_1 beschreibt für Flüge ohne Überbuchung die Einnahmen durch k Passagiere, die tatsächlich fliegen, und die Einnahmen für $(108 - k)$ Stornierungen.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	T_2 beschreibt für Flüge mit Überbuchung die Einnahmen durch 100 Passagiere, die tatsächlich fliegen und die Einnahmen durch $(108 - k)$ Stornierungen abzüglich der Kosten für $(k - 100)$ Überbuchungen.		15	15
	Insgesamt 100 BWE	35	50	15

Aufgabe 5: Defekte Geräte **Gy, GS, TG, WG**

Bei diesem Beispiel, das im Wesentlichen den „Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik in der Fassung vom 1.12.1989" entnommen ist, handelt es sich um eine traditionelle Aufgabenstellung aus dem Gebiet der Stochastik. Sie zielt auf die Anwendung stochastischer Grundbegriffe in einer klar umrissenen Ausgangssituation.

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Die Zuordnung von anwendungsnahen Sachverhalten zum Modell eines mehrstufigen Zufallsexperimentes, die Auswertung von Baumdiagrammen und die Übertragung auf Aussagen über absolute Häufigkeiten wurden an verschiedenen Beispielen im Unterricht geübt. Der Sachverhalt in Teilen von b) ist zwar komplex, die numerische Auswertung stellt aber keine besonderen Anforderungen. Die Analyse zu Teilen von c) und die zur Beurteilung erforderliche Berechnung sind in dieser Kombination neu. Auch die notwendige numerische Auswertung und die Interpretation des Ergebnisses erfordern Einblick in die Komplexität des Sachverhaltes.

Zusätzliche Hilfsmittel: keine

Aufgabenstellung

Eine Firma prüft, ob sie ihren Kunden für ein Gerät eine Garantieverlängerung nach Ablauf der gesetzlichen Garantiezeit anbieten kann.
Aus der Erfahrung kann die Firma für den Zeitraum der Garantieverlängerung folgende Annahmen treffen:

(1) Bei den drei Einzelteilen T_1, T_2 und T_3 des Gerätes kommt es unabhängig voneinander zu einem Defekt, und zwar jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0,2.

(2) Ein repariertes Einzelteil des Gerätes fällt in dem betrachteten Zeitraum nicht noch einmal aus.

(3) Die Materialkosten bei der Reparatur betragen 50 € für T_1, 40 € für T_2 und 10 € für T_3.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die möglichen Kombinationen von Reparaturfällen bei einem Gerät auftreten können.

b) Bei wie vielen von 1000 Geräten muss mit mindestens einer Reparatur gerechnet werden?
Wie viele Einzelreparaturen fallen bei 1000 Geräten im Durchschnitt an?
Mit welchen Materialkosten für Reparaturen muss die Firma bei 1000 Geräten rechnen?

c) Für die Reparatur jedes Einzelteils entstehen 30 € an Arbeitskosten. Die Firma untersucht drei Arten von Kaufverträgen.

Variante 1: Für das Gerät wird keine Garantieverlängerung gewährt.

Variante 2: Für das Gerät wird eine Garantieverlängerung nur für Materialkosten gewährt. Dafür wird der Preis des Gerätes um 20 € erhöht.

Variante 3: Für das Gerät wird eine Garantieverlängerung für Material- und Arbeitskosten gewährt. Für diese Vollgarantie wird der Preis des Gerätes um weitere 15 € erhöht.

Beurteilen Sie die Varianten aus Sicht der Firma und der Kunden.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Genau ein Ausfall tritt jeweils auf mit der Wahrscheinlichkeit $P_1 = 0,2 \cdot 0,8^2 = 12,8\%$ (3 Fälle). Genau zwei Ausfälle treten jeweils auf mit der Wahrscheinlichkeit $P_2 = 0,2^2 \cdot 0,8 = 3,2\%$ (3 Fälle). Drei Ausfälle treten auf mit der Wahrscheinlichkeit $P_1 = 0,2^3 = 0,8\%$ (1 Fall).	20		
b)	Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Gerät mindestens ein Defekt auftritt, beträgt $P_d = 1 - 0,8^3 = 48,8\%$. Der Erwartungswert für die Anzahl defekter Geräte unter 1000 produzierten Geräten beträgt also 488 . Bei 1000 Geräten werden 3000 Einzelteile produziert, für die jeweils unabhängig voneinander eine Reparatur mit 20 % Wahrscheinlichkeit auftritt. Also beträgt der Erwartungswert für die Anzahl der Reparaturen $3000 \cdot 0,2 = 600$. Der Erwartungswert der Materialkosten bei 1000 Geräten beträgt $1000 \cdot 0,2 \cdot (50+40+10)$ € = 20000 €	10	20	
c)	Wir gehen davon aus, dass in dem betrachteten Zeitraum defekte Teile in jedem Falle repariert werden. Dann werden pro Gerät im Mittel $3 \cdot 0,2 \cdot 30$ € = 18 € Arbeitskosten und $0,2 \cdot (50+40+10)$ € = 20 € Materialkosten erwartet. Aus der Sicht des Kunden werden also bei Variante 1: im Mittel 38 € Zusatzkosten erwartet, schlimmstenfalls aber 190 €, bei Variante 2: im Mittel 38 € Zusatzkosten (davon 20 € sicher) erwartet, schlimmstenfalls aber 110 €, bei Variante 3: mit Sicherheit 35 € Zusatzkosten entstehen. Richtet sich der Kunde nach dem Kostenerwartungswert, so sollte er Variante 3 wählen, jedoch je nach Risikobereitschaft sind auch die Varianten 1 und 2 für ihn ökonomisch sinnvoll. Aus der Sicht der Firma spielt bei genügend hohem Absatz das Risiko keine Rolle. Der Arbeits- und Kostenaufwand ist invariant, da wir unterstellen, dass alle defekten Geräte repariert werden. So gesehen, könnte die Firma - spiegelsymmetrisch zur Interessenlage des Kunden - die Varianten 1 und 2 gleichermaßen bevorzugen. Andererseits wird die Firma Variante 3 auch als Werbefaktor zur Umsatzsteigerung sehen und ihre Werbung deshalb eventuell auf Variante 3 ausrichten.		30	20
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

Aufgabe 6: Placebos **Gy, GS, TG, WG**

Hilfsmittel: Tabelle für kumulierte Binomialwahrscheinlichkeiten für n = 20.

Aufgabenstellung

Man hat festgestellt, dass medizinisch unwirksame Tabletten (Placebos) bei vielen Patienten die gleiche Wirkung erzielen wie gleich aussehende echte Tabletten.

a) In einer Klinik bekommt ein Patient zur Beruhigung zwei Tabletten. Natürlich sollte man Placebos nicht mit echten Tabletten vermischen. Die Krankenschwester hat aber aus Versehen die Schachtel, in der sich noch 4 echte Beruhigungstabletten befinden, mit einem Placebo aufgefüllt. Sie entnimmt nun nacheinander zufällig aus dieser Schachtel mit insgesamt fünf Tabletten zwei Tabletten und fragt sich nach den Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

   A: „Beide Tabletten sind echt.“

   B: „Nur die erste gezogene Tablette ist echt.“

   C: „Eine der beiden Tabletten ist das Placebo.“

   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten von A, B und C.

b) Die Krankenschwester hat eine andere Schachtel mit fünf Tabletten, unter denen sich aus Versehen 2, 3 oder 4 durch Placebos befinden.
   Bestimmen Sie für diese drei Fälle jeweils die Wahrscheinlichkeit, mit der der Patient bei zwei verabreichten Tabletten mindestens ein Placebo bekommt. Beurteilen Sie die Situation.

c) In der Klinik weiß man, dass p = 60% derjenigen Patienten, die Beruhigungsmittel nehmen, auf Placebos ansprechen. Wie viele Patienten, die Beruhigungstabletten nehmen, müsste man untersuchen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % wenigstens einen unter ihnen zu finden, der auf Placebos anspricht?

d) Ein Arzt der Klinik vertritt die Meinung, dass der in der Teilaufgabe c) beschriebene Anteil p erhöht werden kann, wenn man Placebos mit ausgesprochen bitterem Geschmack verwendet.
   Er will dazu einen Signifikanztest auf dem 2%-Niveau durchführen und plant, 20 Patienten die neuen Placebos zu verabreichen. Wie viele Patienten müssen mindestens ansprechen, damit die Nullhypothese H_0: $p = 0{,}6$ verworfen werden kann?

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Mit Hilfe eines Baumdiagramms oder über kombinatorische Überlegungen ergibt sich: $P(A) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$ $P(B) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$ $P(C) = 1 - P(A) = \frac{2}{5}$.	15	5	
b)	Bezeichnung D: „Mindestens ein Placebo bei zwei verabreichten Tabletten.“ 1. Fall: 2 Placebos und 3 echte Tabletten $P(D) = 1 - P(\bar{D})$ $= 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$ $P(D) = 0{,}7$. 2. Fall: 3 Placebos und 2 echte Tabletten $P(D) = 1 - P(\bar{D})$ $P(D) = 0{,}9$. 3. Fall: 4 Placebos und 1 echte Tablette $P(D) = 1$. Damit gilt: $P(D) \geq 0{,}7$ in allen drei Fällen. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Patient unwirksame Medikamente bekommt, ist sehr hoch. Diese Schachtel eignet sich also nicht zum ordnungsgemäßen Verabreichen des Medikaments.	15	10	
c)	Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Beruhigungsmittel nehmenden Patienten an, die auf Placebos ansprechen. Die statistische Untersuchung lässt sich als Bernoulliexperiment auffassen, wobei X mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}6$ binomialverteilt ist. Die Anzahl n der Patienten ist für mindestens 1 Treffer ($X \geq 1$) gesucht. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ $= 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^n$ $1 - 0{,}4^n > 0{,}99$ $0{,}4^n < 0{,}01$ $n > \frac{\lg 0{,}01}{\lg 0{,}4} \approx 5{,}03 \quad \Rightarrow \quad n \geq 6$ Man müsste mindestens 6 Patienten untersuchen.		15	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Die Untersuchung von 20 Patienten wird als ein Bernoulliexperiment aufgefasst. Zunächst müssen die Parameter aus dem Aufgabentext herausgearbeitet werden. Zufallsvariable X: „Anzahl der Patienten, die auf Placebos ansprechen.“ Nullhypothese H_0: $p = 0{,}6$ Alternativhypothese H_1: $p_1 > 0{,}6$ X ist $B_{20;0,6}$ -verteilt. Es gilt: $P(X > 16) = 1 - P(X \leq 16) = \sum_{k=17}^{20} B_{20;0,6}(k) \approx 1{,}6\ \%$, aber $P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = \sum_{k=16}^{20} B_{20;0,6}(k) \approx 5{,}1\ \%$. Also müssen mindestens 17 Patienten auf die Placebos ansprechen, damit die Nullhypothese verworfen werden kann.	5	20	10
	Insgesamt 100 BWE	35	50	15

Aufgabe 7: Mikrochips **Gy, GS, TG, WG**

Herkunft der Aufgabe: Zentralabitur Bayern 2001, Grundkurs.

Aufgabenstellung

Der Konzern „Electronix“ stellt Mikrochips in Massenproduktion her. Jeder hergestellte Chip ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % fehlerhaft.

a) Mit welchem mathematischen Modell lässt sich das Ziehen einer Stichprobe von 100 Chips beschreiben?

Verwenden Sie das Modell aus a) für die weiteren Aufgabenteile.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 100 Chips genau 20 fehlerhaft sind.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Tabellenwerks das kleinstmögliche Intervall mit dem Mittelpunkt 20, in dem bei insgesamt 100 Chips die Anzahl der fehlerhaften Chips mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 85 % liegt.

d) Wie viele Chips müssen der Produktion mindestens entnommen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % wenigstens ein fehlerhafter dabei ist?

Zur Aussonderung fehlerhafter Chips wird ein Prüfgerät eingesetzt, von dem Folgendes bekannt ist: Unter allen geprüften Chips beträgt der Anteil der Chips, die einwandfrei sind und dennoch ausgesondert werden, 3 %. Insgesamt werden 83 % aller Chips nicht ausgesondert.

e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Chip fehlerhaft ist und ausgesondert wird. Welcher Anteil der fehlerhaften Chips wird demnach ausgesondert?

Der Konzern beauftragt ein Expertenteam mit Maßnahmen zur Qualitätsverbesserung. Falls der Anteil der fehlerhaften Chips deutlich gesenkt werden kann, wird dem Team eine großzügige Prämie gezahlt. Nach Abschluss der Verbesserungsmaßnahmen wird der Produktion eine Stichprobe von 100 Chips entnommen.
Eine erste Überlegung der Konzernleitung sieht vor, dass die Prämie gezahlt wird, wenn sich unter diesen 100 Chips höchstens 11 fehlerhafte befinden.

f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält das Team dann die Prämie, obwohl keine Qualitätsverbesserung eingetreten ist?

g) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dann dem Team die Prämie verweigert, obwohl der Anteil der fehlerhaften Chips auf 10% gesunken ist?

h) Beurteilen Sie die Entscheidungsregel.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Da bei den Chips nur die Ergebnisse „fehlerhaft“ und „fehlerfrei“ unterschieden werden, kann die Herstellung eines Chips als Bernoulli-Experiment angesehen werden. Jeder Chip ist nach Aufgabenstellung mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % fehlerhaft. Soll mit einer binomialverteilten Zufallsgröße gerechnet werden, muss von einer Unabhängigkeit im Produktionsprozess ausgegangen werden. Außerdem muss auf die „Massenproduktion“ verwiesen werden, bei der auch ein Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit bei jedem Zug nur unwesentlich verändert.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Da die Prüflinge die Tabellen zur Verfügung haben, können sie $P(X=20)$ „direkt“ als B(100; 0,2;20) = $\binom{100}{20} \cdot 0{,}2^k \cdot 0{,}8^{n-k} \approx 0{,}099$ berechnen oder $P(X=20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 19) \approx 0{,}5595 - 0{,}4602 = 0{,}0993$.</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Es gilt: $P(14 \leq X \leq 26) = P(X \leq 26) - P(X \leq 13) \approx 0{,}9442 - 0{,}0469 = 0{,}8973$,
sowie $P(15 \leq X \leq 25) = P(X \leq 25) - P(X \leq 14) \approx 0{,}9125 - 0{,}0804 = 0{,}8321$.
Damit ist [14;26] das kleinstmögliche Intervall mit der geforderten Eigenschaft.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n, für die gilt:
$1 - 0{,}8^n > 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}8^n < 0{,}01 \Leftrightarrow n > \frac{\lg 0{,}01}{\lg 0{,}8}$, also $n = 21$.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Es gilt: $P(F)=0{,}2$, $P(\bar{F})=0{,}8$, $P(\bar{F} \cap A)=0{,}03$, $P(\bar{A}) = 0{,}83$.
Zu bestimmen ist zunächst $P(F \cap A)$. Trägt man die Voraussetzungen in eine Tabelle ein, so ergibt sich:
<table>
<tr><th></th><th>Ausgesondert</th><th>Nicht ausgesondert</th><th></th></tr>
<tr><td>Fehlerhaft</td><td>0,14</td><td>0,06</td><td>0,2</td></tr>
<tr><td>Fehlerfrei</td><td>0,03</td><td>0,77</td><td>0,8</td></tr>
<tr><td></td><td>0,17</td><td>0,83</td><td>1</td></tr>
</table>
Mithin ist $P(F \cap A) = 0{,}14$.
Von den fehlerhaften Chips werden also 70% ausgesondert.</td><td>5</td><td>10</td><td>5</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Es gilt immer noch: $p = 0{,}2$. Die Tabelle ergibt: $P(X \leq 11) \approx 0{,}013 = 1{,}3$ %.</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>g)</td><td>Für $p = 0{,}1$ erhält man: $P(X \leq 11) \approx 0{,}703 = 70{,}3$ %. Also wird die Prämie mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 29,7 % zu Unrecht verweigert.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
h)	Die Wahrscheinlichkeit, zu Unrecht die Prämie zahlen zu müssen, ist erfreulich niedrig. Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 30% erhält das Team jedoch zu Unrecht die Prämie nicht, wenn der Anteil der fehlerhaften Chips auf 10 % gesenkt wurde. Bei Senkung auf 15 % – was ja auch eine deutliche Senkung bedeutete – wäre diese Irrtumswahrscheinlichkeit noch viel größer, nämlich ca. 84 %. Der Konzern würde den Betrag dann zwar sparen, vielleicht aber fähige Mitarbeiter verlieren. Dies gilt es gegeneinander abzuwägen.			15
	Insgesamt 100 BWE	15	65	20

Aufgabe 8: Gläser   Gy, GS, TG, WG

Aufgabenstellung

In einer Glasbläserei werden mundgeblasene handgeschliffene Gläser hergestellt. Die Gläser werden in fünf Arbeitsgängen gefertigt, die unabhängig voneinander erfolgen. Erfahrungsgemäß wird in den einzelnen Arbeitsgängen unabhängig voneinander die erwünschte Qualität mit folgenden Wahrscheinlichkeiten **nicht** erreicht:

Arbeitsgang 1	Arbeitsgang 2	Arbeitsgang 3	Arbeitsgang 4	Arbeitsgang 5
0,08	0,05	0,02	0,04	0,03

a) Zeigen Sie, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $\approx 0{,}20$ ein fertiges Glas **nicht** fehlerfrei ist.

b) Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der fehlerhaften Gläser in einer Produktionsserie vom Umfang n.
Begründen Sie, dass man X als binomialverteilt ansehen kann und geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X, ihren Erwartungswert, ihre Varianz und Streuung als Funktion von n an.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 30 hergestellten Gläsern höchstens 3 fehlerhaft sind.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 100 gefertigten Gläsern 30 oder mehr fehlerhaft sind. Schätzen Sie zunächst diese Wahrscheinlichkeit ab unter Verwendung des Erwartungswertes und der Standardabweichung der Zufallsvariablen X (vgl. b)) und rechnen Sie anschließend genauer mit Hilfe der Tafel.

e) Bevor die Gläser verschickt werden, findet eine Qualitätskontrolle statt.
Dabei werden 5% der fehlerhaften Gläser übersehen, 1% der Gläser beanstandet, die noch den Anforderungen entsprechen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Glas, das verschickt wird, den Qualitätsanforderungen nicht genügt?

f) Ein neu eingestellter Prüfer hat bereits 25 Gläser geprüft und dabei nur ein einziges fehlerhaftes Glas entdeckt. Er beginnt, an der eigenen Sorgfalt zu zweifeln.
Sind seine Zweifel begründet?

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Es bietet sich an, zunächst die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis $\overline{F}$: „Ein Glas ist fehlerfrei" zu berechnen. Nach Voraussetzung erfolgen die Arbeitsgänge unabhängig voneinander, daher gilt: $P(\overline{F}) = 0{,}92 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}97 \approx 0{,}80$ $P(F) = 1 - P(\overline{F}) \approx 0{,}20$.		15	
b)	Werden bei den fertigen Gläsern nur die Ergebnisse „fehlerhaft" und „fehlerfrei" unterschieden, kann die Herstellung eines Glases als Bernoulli-Experiment angesehen werden. Da die Gläser nach Voraussetzung unabhängig voneinander mit der gleichen Wahrscheinlichkeit fehlerhaft sind, kann die Produktion einer Serie von Gläsern als Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}2$ modelliert werden. Da die Zufallsvariable X die Anzahl der Treffer in dieser Bernoulli-Kette zählt, ist X n-0,2-binomialverteilt, und es gilt: $P(X{=}k) = B(n;\, 0{,}2;k) = \binom{n}{k} \cdot 0{,}2^k \cdot 0{,}8^{n-k}$ $E(X) = \mu = n \cdot p = 0{,}2n$, $V(X) = n \cdot p \cdot q = 0{,}16n$, $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{0{,}16n} = 0{,}4\sqrt{n}$.	10	10	
c)	$P(X \le 3) = \sum_{k=0}^{3} B(30; 0{,}2; k) = \sum_{k=0}^{3} \binom{30}{k} \cdot 0{,}2^k \cdot 0{,}8^{n-k}$ $= 0{,}8^{30} + 30 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^{29} + 435 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{28} + 4060 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^{27}$ $\approx 0{,}123 = 12{,}3\%$.	10		
d)	Da hier gilt: μ = 20 , σ = 4, muss die gesuchte Wahrscheinlichkeit weniger als 2,5% betragen, da die betrachteten Trefferanzahlen außerhalb der 1,96σ-Umgebung um μ liegen. $P(X \ge 30) = 1 - P(X \le 29) = 1 - \sum_{k=0}^{29} B(100; 0{,}2; k)$ Mit Hilfe der Tafel für kumulierte Binomialverteilungen erhält man: $1 - \sum_{k=0}^{29} B(100; 0{,}2; k) \approx 1 - 0{,}989 = 0{,}011 = 1{,}1\%$.	5	5	10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Mit den Bezeichnungen F:= „Glas erfüllt nicht die Anforderungen“ und V:= „Glas besteht die Kontrolle“ gilt: $P(F) = 0{,}2$, $P(\bar{F}) = 0{,}8$, $P(V/F) = 0{,}05$, $P(\bar{V}/\bar{F}) = 0{,}01$. Gefragt ist nach $P(F/V)$. Diese Wahrscheinlichkeit kann durch geeignete Umformungen des Ansatzes $P(F/V) = \frac{P(F \cap V)}{P(V)}$, mit Hilfe eines kleinen Baumdiagramms oder einer Vierfeldertafel bestimmt werden. $P(F/V) \approx 0{,}012 = 1{,}2\%$.		20	
f)	Die Wahrscheinlichkeit, weniger als zwei fehlerhafte Gläser bei einer Stichprobe von 25 Gläsern zu erhalten, beträgt nur B(25; 0,2; 0) + B(25; 0,2; 1) ≈ 3%. Insofern besteht Anlass zu Zweifeln, die aber erst statistisch bestätigt würden, wenn bei weiteren 25 „Ziehungen“ wieder weniger als zwei fehlerhafte Gläser entdeckt würden.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Aufgabe 9: Flaschenabfüllautomat — Gy, GS, TG, WG

Aufgabenstellung

Der Abfüllautomat einer Getränkefirma füllt Flaschen ab. Die Füllmaschine weist eine gewisse Streuung hinsichtlich der abgefüllten Menge auf. Viele Messungen haben gezeigt, dass die Füllhöhe in 5% aller Fälle so niedrig ausfällt (Flaschentyp 0), dass der Kunde meinen könnte, eine Mindermenge zu kaufen, obwohl sichergestellt ist, dass immer mindestens die angegebene Menge abgefüllt ist. Flaschen mit zufrieden stellender Abfüllhöhe werden „Flaschentyp 1“ genannt.

Die auf Flaschentyp 0 und 1 nicht kontrollierten abgefüllten Flaschen werden in Kästen zu je 20 Flaschen abgepackt.

a) Beschreiben Sie ein beim Abpacken von Flaschen in Kästen zugrunde gelegtes stochastisches Modell, wenn das Abpacken als Zufallsexperiment aufgefasst wird.

b) Die Geschäftsleitung der Getränkefirma möchte wissen, wie sich die Flaschentypen 0 und 1 in einem Kasten verteilen. Es soll auf die Anschaffung eines neuen Abfüllautomaten verzichtet werden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kasten höchstens 2 Flaschen des Typs 0 aufweist, mindestens 90% beträgt.
Muss die Getränkefirma einen neuen Abfüllautomaten kaufen?

c) Ein Kasten mit 20 abgefüllten Flaschen enthält genau viermal den Flaschentyp 0.
Jemand entnimmt aus diesem Kasten zufällig 3 Flaschen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der 3 Flaschen eine mit geringer Füllhöhe (Flaschentyp 0) ist?

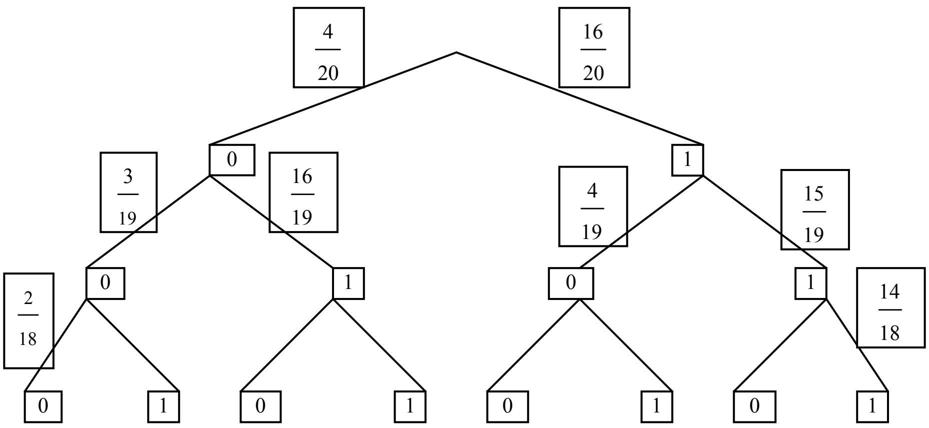
d) Die Geschäftsleitung überlegt, ob eine andere Kastengröße kundenfreundlicher ist. Wie viele Flaschen dürfen höchstens in einem Kasten zusammengestellt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50% keine Flasche des Typs 0 in diesem Kasten auftritt?
Beurteilen Sie die Idee der Geschäftsleitung.

Die Abteilung Qualitätskontrolle der Getränkefirma vermutet nun sogar, dass sich beim Abfüllvorgang die Anzahl der Flaschen des Typs 0 erheblich vergrößert hat. Um dies zu testen, werden 100 zufällig ausgewählte Flaschen untersucht. Befinden sich darunter mehr als sieben Flaschen des Typs 0, so gilt die Vermutung als bestätigt.

e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der man sich bei dieser Entscheidungsregel irrtümlicherweise für eine größere Wahrscheinlichkeit für Flaschentyp 0 entscheidet, obwohl sich diese Wahrscheinlichkeit nicht verändert hat?

f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Vergrößerung der Wahrscheinlichkeit für Flaschentyp 0 nicht entdeckt, obwohl sich diese Wahrscheinlichkeit tatsächlich verdoppelt hat?

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Das Auffüllen eines Kastens mit Flaschen lässt sich als Bernoulliexperiment (Treffer = *Flaschentyp 0*; zweiter Ausgang = *Flaschentyp 1*) der Kettenlänge $n = 20$ beschreiben. Wenn man voraussetzt, dass das variierende Füllverhalten der Maschine stochastisch unabhängig erfolgt, so kann man die Zufallsvariable X, die die Anzahl der Ausschussflaschen in einem 20er Kasten „zählt“, als binomialverteilt ansehen. Die Wahrscheinlichkeit (Trefferwahrscheinlichkeit) für den *Flaschentyp 0* beträgt entsprechend der relativen Häufigkeit $p = 0{,}05$.	10	5	
b)	$P(X \le k) = \sum_{0}^{k} B(n;p;k)$ $P(X \le 2) = \sum_{0}^{2} B(20;0{,}05;k)$ $= \binom{20}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{18} + \binom{20}{1} \cdot 0{,}05^1 \cdot 0{,}95^{19} + \binom{20}{0} \cdot 0{,}95^{20}$ $= 92{,}45\%$ Die Bestimmung der gesuchten Wahrscheinlichkeit ist ebenso über eine Tabelle oder ein angedeutetes Baumdiagramm möglich. Diese Wahrscheinlichkeit ist größer als 90 %, somit ist die Neuanschaffung einer Abfüllanlage nicht nötig.	10	5	
c)	Aus dem Kasten haben wir 3-mal ohne Zurücklegen gezogen. Ein **Baumdiagramm** oder kombinatorische Überlegungen führen zum Ergebnis. Der kürzeste Lösungsweg verläuft über das Gegenereignis.  $P(X \ge 1) = P(A) = P(A1) + P(A2) + P(A3) = 1 - P(\overline{A})$ $= 1 - \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{20 \cdot 19 \cdot 18}$ $P(X \ge 1) = 50{,}9\%$	5	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
d)	Gesucht ist die Anzahl der Flaschen n mit $P(X=0)>0,5$. $P(X=0) > 0,5$ $0,95^n > 0,5$ $n < \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}$ $n < 13,51$ In einem Kasten dürfen höchstens 13 Flaschen zusammengefasst werden. Kästen mit 12 Flaschen sind im Handel sehr verbreitet. Dem Kunden erscheint es, dass Flaschen vom *Typ 0* jetzt seltener vorkommen. Obwohl nun durchaus in einem Kasten durchschnittlich weniger Flaschen geringer Füllhöhe sind, sollte es für den Konsumenten unerheblich sein, welche Kastengröße er kauft. Die Anzahl der konsumierten Flaschen *Typ 0* hängt nur von seinem Gesamtkonsum ab.		15	
e)	Es handelt sich hier um einen einseitigen Hypothesentest mit einer Stichprobenlänge von $n = 100$, einer Nullhypothese H_0 von p=0,05 für Flaschen des *Typs 0* einer binomialverteilten Zufallsgröße X. Die Gegenhypothese lautet H_1: $p > 0,05$. Die Entscheidungsregel lautet: Annahmebereich für H_0: $A = \{0, 1, \ldots, 7\}$; Ablehnungsbereich für H_0: $\overline{A} = \{8, 9, \ldots, 100\}$. Annahme: H_0 sei wahr, gesucht ist die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art: $P_{H_0}(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) \approx 0,128$. (entnommen aus der Tabelle für kumulierte Binomialwahrscheinlichkeiten.) Mit einer Wahrscheinlichkeit von fast 13% entscheidet man sich bei dieser Entscheidungsregel irrtümlicherweise für eine größere Wahrscheinlichkeit für Flaschentyp 0, obwohl sich diese Wahrscheinlichkeit nicht verändert hat.		10	10
f)	Es wird angenommen, dass sich die Wahrscheinlichkeit für *Flaschentyp 0* auf $p = 0,1$ verdoppelt hat. $P_{H_1}(X \leq 7) \approx 0,21$ (entnommen aus der Tabelle für kumulierte Binomialwahrscheinlichkeiten.) Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 21% wird die Vergrößerung der Wahrscheinlichkeit für Flaschentyp 0 nicht entdeckt, obwohl sich diese Wahrscheinlichkeit tatsächlich verdoppelt hat.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Aufgabe 10: Ein Entscheidungsproblem Gy, GS, TG, WG

Aufgabenstellung

Vor Ihnen liegt eine Bernoulli-Urne mit schwarzen und weißen Kugeln, von der Sie nur wissen, dass sie 9 Kugeln enthält. Die Anzahl der schwarzen und damit auch der weißen Kugeln ist unbekannt. Für jede schwarze Kugel bekomme man 20 €. Man darf nur die ganze Urne für 100 € kaufen oder gar nichts.

Modellieren Sie dieses Entscheidungsproblem in einem Bayes-Modell,

a) wenn Sie keinerlei Ahnung haben, wie die Zusammensetzung der Urne sein könnte,

b) wenn Sie immerhin sicher sind, dass mindestens eine schwarze Kugel in der Urne ist, aber sonst keine Ahnung haben,

c) wenn Sie vor der Entscheidung zunächst keinerlei Ahnung hatten, dann einmal in die Urne greifen durften und dabei eine schwarze Kugel gezogen haben,

d) wenn Sie keinerlei Ahnung haben, aber bevor Sie sich entscheiden, dürften Sie die Urne durch fünfmaliges Ziehen mit Zurücklegen prüfen. Formulieren Sie eine Entscheidungsregel.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	I	II	III
a)	Für alle Aufgabenteile wählen wir eine Gewinnerwartung $\geq$ 100 € als Entscheidungskriterium. Es gibt 10 Möglichkeiten (Hypothesen), für die wir als a-priori-Verteilung wegen der totalen Unwissenheit die Gleichverteilung annehmen. Die Gewinnerwartung beträgt dann $E = 20 \cdot \frac{1}{10} \cdot \sum_{i=0}^{9} i$ € = 90 €. Es lohnt sich also nicht, die Urne zu „kaufen".	10	5	
b)	Wir nehmen wieder eine Gleichverteilung für die Restfälle an und erhalten: $E = 20 \cdot \frac{1}{9} \cdot \sum_{i=1}^{9} i$ € = 100 €. Eine klare Entscheidung ist also nicht möglich.	5	10	
c)	Die a-posteriori-Verteilung sieht wie folgt aus: (Tabelle 1) Also gilt E ≈ 126,67 €. Man sollte die Urne kaufen.		25	
d)	Um nicht für alle Ergebnisse der $B(5,\frac{i}{9})$ -binomialverteilten Zufallsvariablen X die zugehörige a-posteriori-Verteilung und den zugehörigen Erwartungswert auszurechnen, überlegen wir, dass der Kauf ja nur lohnt, wenn $i > 5$, d.h. ab $X = 3$ oder $X = 4$ wird wohl etwa die Entscheidung für Kauf liegen. Wir beginnen die Berechnungen deshalb mit $X = 2$ und erhalten: (Tabelle 2) Also lohnt der Kauf, wenn 3 oder mehr schwarze Kugeln gezogen werden.		30	15
	Insgesamt 100 BWE	15	70	15

Tabelle 1 (zu c):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$\frac{1}{45}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{3}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{5}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{7}{45}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{9}{45}$

Tabelle 2 (zu d):

i / X=	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	E
2	0	0,06	0,15	0,22	0,23	0,18	0,11	0,04	0,01	0	77 €
3	0	0,01	0,04	0,11	0,18	0,23	0,22	0,15	0.06	0	103€
…											

Aufgabe 11: Verkehrskontrolle **Gy, GS, TG, WG**

Aufgabenstellung

Eine verkehrsreiche Straße verleitet an einer bestimmten Stelle zum Schnellfahren. Deshalb wurde dort eine versteckte Radarmessanlage installiert, welche die Geschwindigkeit aller vorbeifahrenden Autos misst und registriert. Von allen vorbei fahrenden Autos sei p der Anteil der „Raser“, d.h. der Anteil der Autos, die mit deutlich überhöhter Geschwindigkeit fahren.
Man weiß, dass $p \approx 20\ \%$.

a) Unter welchen Annahmen über die Verkehrs- und Messbedingungen kann man diese Situation durch eine Bernoulli-Kette beschreiben?

Im Weiteren sei die Annahme von a) erfüllt.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass bei 10 Messungen

- genau drei „Raser“ ermittelt werden
- nicht mehr als 4 „Raser“ ermittelt werden
- der erste ermittelte „Raser“ im 10. gemessenen Auto sitzt
- immer abwechselnd ein „Raser“ und ein „vernünftiger“ Fahrer erfasst werden.

Um die Raserquote zu senken, werden probeweise Warnschilder der Verkehrswacht aufgestellt. An Hand einer Zufallsstichprobe von 100 Autos soll nun ermittelt werden, ob diese Maßnahmen zu einer signifikanten Senkung der Raserquote geführt haben.

c) Entwickeln Sie einen entsprechenden Signifikanztest auf den Signifikanzniveau $\alpha \le \alpha_0 = 5\%$.
Wie groß ist α (Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art) dann tatsächlich?

d) Falls durch die Maßnahme die Raserquote tatsächlich auf $p = \frac{1}{6}$ gesenkt worden wäre, wie groß wäre dann bei dem in 3.1 entwickelten Test die Wahrscheinlichkeit β für einen Fehler 2. Art? Interpretieren Sie das Ergebnis.

e) Angenommen bei dem Test werden unter den 100 Autos 7 „Raser“ gemessen.
Welche Schlussfolgerung würde man dann entsprechend dem in 3.1 entwickelten Test ziehen? Wenn das Testergebnis signifikant für eine Senkung der Raserquote sprechen sollte, so argumentiert eine Bürgerinitiative, so sollten auf vielen weiteren Straßenabschnitten die Schilder aufgestellt werden. Darauf vertreten einige Haushaltspolitiker die Ansicht, dass dies erst zu vertreten wäre, wenn die Raserquote dadurch deutlich auf unter 10 % gesenkt würde. Beurteilen Sie das Ergebnis im Hinblick auf diesen Anspruch.

Anhang zu Aufgabe 11

Tabelle I: Binomialverteilung

$$F(n,p;k) = B(n,p;0) + \cdots + B(n,p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \cdots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	0,02	0,03	0,04	0,05	0,10	1/6	0,20	0,25	0,30	1/3	0,40	0,50	k	n
100	0	0,1326	0476	0169	0059	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	99	100
	1	4033	1946	0872	0371	0003	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	98	
	2	6767	4198	2321	1183	0019	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	97	
	3	8590	6472	4295	2578	0078	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	96	
	4	9492	8179	6289	4360	0237	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	95	
	5	9845	9192	7884	6160	0576	0004	0000	0000	0000	0000	0000	0000	94	
	6	9959	9688	8936	7660	1172	0013	0001	0000	0000	0000	0000	0000	93	
	7	9991	9894	9525	8720	2061	0038	0003	0000	0000	0000	0000	0000	92	
	8	9998	9968	9810	9369	3209	0095	0009	0000	0000	0000	0000	0000	91	
	9		9991	9932	9718	4513	0213	0023	0000	0000	0000	0000	0000	90	
	10		9998	9978	9885	5832	0427	0057	0001	0000	0000	0000	0000	89	
	11			9993	9957	7030	0777	0126	0004	0000	0000	0000	0000	88	
	12			9998	9985	8018	1297	0253	0010	0000	0000	0000	0000	87	
	13				9995	8761	2000	0469	0025	0001	0000	0000	0000	86	
	14				9999	9274	2874	0804	0054	0002	0000	0000	0000	85	
	15					9601	3877	1285	0111	0004	0000	0000	0000	84	
	16					9794	4942	1923	0211	0010	0001	0000	0000	83	
	17					9900	5994	2712	0376	0022	0002	0000	0000	82	
	18					9954	6965	3621	0630	0045	0005	0000	0000	81	
	19					9980	7803	4602	0995	0089	0011	0000	0000	80	
	20					9992	8481	5595	1488	0165	0024	0000	0000	79	
	21					9997	8998	6540	2114	0288	0048	0000	0000	78	
	22					9999	9370	7389	2864	0479	0091	0001	0000	77	
	23						9621	8109	3711	0755	0164	0003	0000	76	
	24						9783	8686	4617	1136	0281	0006	0000	75	
	25						9881	9125	5535	1631	0458	0012	0000	74	
	26						9938	9442	6417	2244	0715	0024	0000	73	
	27						9969	9658	7224	2964	1066	0046	0000	72	
	28						9985	9800	7925	3768	1524	0084	0000	71	
	29						9993	9888	8505	4623	2093	0148	0000	70	
	30						9997	9939	8962	5491	2766	0248	0000	69	
	31						9999	9969	9307	6331	3525	0398	0001	68	
	32							9985	9554	7107	4344	0615	0002	67	
	33							9993	9724	7793	5188	0913	0004	66	
	34							9997	9836	8371	6019	1303	0009	65	
	35							9999	9906	8839	6803	1795	0018	64	
	36							9999	9948	9201	7511	2386	0033	63	
	37								9973	9470	8123	3068	0060	62	
	38								9986	9660	8630	3822	0105	61	
	39								9993	9790	9034	4621	0176	60	
	40								9997	9875	9341	5433	0284	59	
	41								9999	9928	9566	6225	0443	58	
	42									9960	9724	6967	0666	57	
	43									9979	9831	7635	0967	56	
	44									9989	9900	8211	1356	55	
	45									9995	9943	8689	1841	54	
	46									9997	9969	9070	2421	53	
	47									9999	9983	9362	3087	52	
	48									9999	9991	9577	3822	51	
	49										9996	9729	4602	50	
	50										9998	9832	5398	49	
	51										9999	9900	6178	48	
	52											9942	6914	47	
	53											9968	7579	46	
	54											9983	8159	45	
	55											9991	8644	44	
	56											9996	9033	43	
	57											9998	9334	42	
	58											9999	9557	41	
	59												9716	40	
	60												9824	39	
	61												9895	38	
	62												9940	37	
	63												9967	36	
	64												9982	35	
	65												9991	34	
	66												9996	33	
	67												9998	32	
	68												9999	31	
n		0,98	0,97	0,96	0,95	0,90	5/6	0,80	0,75	0,70	2/3	0,60	0,50	k	n

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000.

Bei rot unterlegtem Eingang, d.h. $p \geq 0,5$ gilt: $F(n, p; k) = 1 -$ abgelesener Wert.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Es geht um die Frage der stochastischen Unabhängigkeit der Geschwindigkeiten der einzelnen Autos. Diese ist z.B. dann nicht gegeben, wenn eine dichte Verkehrslage herrscht, wenn Wetterbedingungen das Fahrverhalten steuern, wenn einige die Radaranlage entdecken oder wenn „Gruppen“ fahren (z.B. eine Hochzeitsgesellschaft). Es wird von den Schülerinnen und Schülern eine „ergebnisoffene“, zusammenhängende Darstellung erwartet.		15	
b)	P(„genau 3 Raser“) $=\binom{10}{3}\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^7\approx 20\%$ P(„nicht mehr als 4 Raser“) $=\sum_{k=0}^{4}\binom{10}{k}\cdot 0{,}2^k\cdot 0{,}8^{10-k}\approx 97\%$ P(„erster Raser im 10.Auto“) $=0{,}8^9\cdot 0{,}2\approx 3\%$ P(„abwechselnd“) $=2\cdot 0{,}2^5\cdot 0{,}8^5\approx 0{,}02\%$	25		
c)	Die berechneten Wahrscheinlichkeiten können der Tabelle entnommen werden. Es gilt: $\sum_{k=0}^{13}\binom{100}{k}\cdot 0{,}2^k\cdot 0{,}8^{100-k}\approx 4{,}69\%$, aber $\sum_{k=0}^{14}\binom{100}{k}\cdot 0{,}2^k\cdot 0{,}8^{100-k}\approx 8{,}04\%$. Also sollte die Nullhypothese $H_0: p\geq 0{,}2$ verworfen werden, wenn weniger als 14 Raser ermittelt werden. Für den Fehler 1. Art gilt dann also: $\alpha\approx 4{,}7$ %.		20	
d)	$\beta = 1-\sum_{k=0}^{13}\binom{100}{k}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^k\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{100-k}\approx 80\%$ Dieser Wert ist ziemlich hoch, d.h. selbst wenn die Raserquote um ungefähr 3,3 Prozentpunkte gesenkt würde, ist die Wahrscheinlichkeit groß, dass der Test dies nicht „entdeckt“.		10	10
e)	Weil 7 < 14, spricht das Ergebnis signifikant für eine Senkung der Raserquote. Die Haushaltspolitiker dagegen würden die Nullhypothese $H_0: p\geq 0{,}1$ testen müssen. Es gilt: $\sum_{k=0}^{7}\binom{100}{k}\cdot 0{,}1^k\cdot 0{,}9^{100-k}\approx 21\%$. Aus ihrer Sicht ist das Ergebnis nicht signifikant, sie würden die Maßnahmen ablehnen.			20
	Insgesamt 100 BWE	25	45	30

4.2 Leistungskurs

4.2.1 Analysis

Aufgabe 1: Funktionenschar von gebrochen rationalen Funktionen Gy, GS, TG, WG

Eine Untersuchung einer Funktionenschar mit einem Extremalproblem und einer uneigentlichen Integration.

Aufgabenstellung

Für jedes $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eine Funktion f_t mit $f_t(x) = \frac{4}{x} + \frac{4t}{x^2}$, $x \in D_{f_t}$, definiert.

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von f_t an und untersuchen Sie die Graphen von f_t auf Asymptoten, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.

b) Skizzieren Sie den Graphen von f_1 für $-6 \le x \le 6$ in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm.

c) Im Teil b) ist nur ein Graph der Funktionenschar gezeichnet worden. In diesem Aufgabenteil sollen Sie nun erläutern, wie sich in Abhängigkeit von $t > 0$ das Aussehen der Graphen verändert. Bestimmen Sie dazu die Gleichung der Ortskurve aller Extrempunkte und zeichnen Sie die für $t > 0$ relevanten Teile der Ortskurve in das im Aufgabenteil b) gezeichnete Koordinatensystem ein.

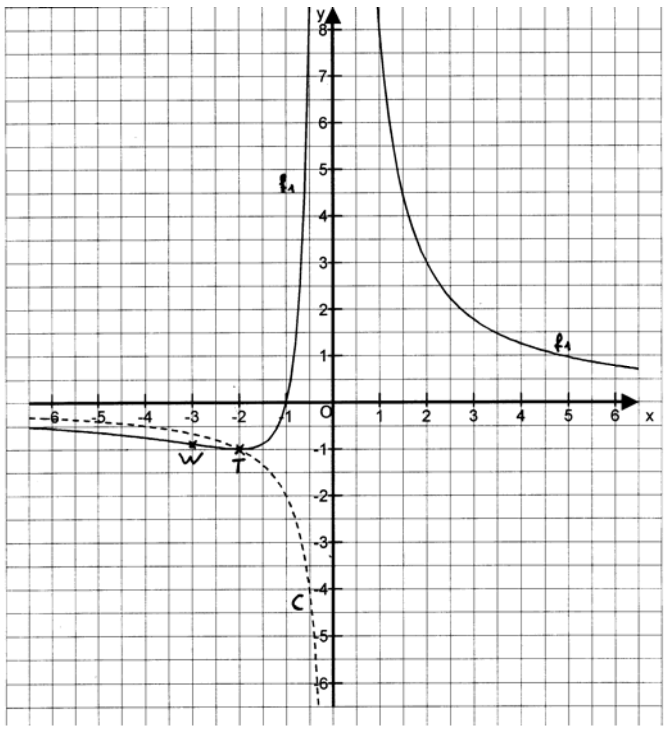
d) Für $t = 1$ und $x > 0$ sei das folgende Rechteck durch die 4 Punkte $(0 \mid 0)$, $(x \mid 0)$, $(x \mid f_1(x))$ und $(0 \mid f_1(x))$ definiert. Untersuchen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks auf Extremwerte und begründen Sie eine Aussage über die möglichen Werte der Flächeninhalte.

e) Der Graph von f_t schließt mit der x - Achse über dem Intervall $[2;\infty[$ eine Fläche ein.
Entscheiden Sie, ob der Flächeninhalt endlich oder unendlich ist und geben Sie ihn gegebenenfalls an.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Senkrechte Asymptote: $x = 0$ (Polstelle). Waagerechte Asymptote: $y = 0$, denn $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{x} = 0$ *und* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4t}{x^2} = 0$. Nullstellen: $\frac{4}{x} + \frac{4t}{x^2} = \frac{4x}{x^2} + \frac{4t}{x^2} = \frac{4(x+t)}{x^2}$. Also folgt aus $f_t(x) = 0$, dass $x + t = 0$ ist, d. h. $x = -t$. Die Nullstelle von f_t ist also $x_{t_0} = -t$. Zur Ermittlung der Extremwerte von f_t werden zuerst die Nullstellen der ersten Ableitung von f_t bestimmt: $f_t\,'(x) = -\frac{4}{x^2} - \frac{8t}{x^3} = -\left(\frac{4x}{x^3} + \frac{8t}{x^3}\right) = -4\left(\frac{x+2t}{x^3}\right)$. Also folgt aus $f_t\,'(x) = 0$, dass $x + 2t = 0$ ist, d.h. $x = -2t$. $x_{t_E} = -2t$ ist also eine mögliche Extremstelle für f_t. Zur Kontrolle, ob und was für ein Extremum vorliegt, wird die zweite Ableitung gebildet $f_t\,''(x) = \frac{8}{x^3} + \frac{24t}{x^4} = \frac{8x}{x^4} + \frac{24t}{x^4} = 8\left(\frac{x+3t}{x^4}\right)$ und x_{tE} eingesetzt: $f_t\,''(-2t) = 8\left(\frac{-2t+3t}{16t^4}\right) = \frac{t}{2t^4} = \frac{1}{2t^3}$. Fallunterscheidung: Für $t > 0$ ist $f_t\,''(-2t) > 0$, also hat f_t bei x_{tE} eine Minimumstelle mit dem Tiefpunkt $T(-2t \mid -\frac{1}{t})$. Für $t < 0$ ist $f_t\,''(-2t) < 0$, also hat f_t bei x_{tE} eine Maximumstelle mit dem Hochpunkt $H(-2t \mid -\frac{1}{t})$. Zur Ermittlung der Wendestellen von f_t werden zuerst die Nullstellen der zweiten Ableitung bestimmt: Aus $f_t\,''(x) = 0$ folgt, dass $x + 3t = 0$ ist, also $x = -3t$. $x_{tW} = -3t$ ist also eine mögliche Wendestelle. Zur Kontrolle, ob x_{tW} wirklich eine Wendestelle ist, wird überprüft, ob $f_t\,''$ bei x_{tW} einen Vorzeichenwechsel hat: $f_t\,''(-2t) = \frac{2}{t^3}$ *und* $f_t\,''(-4t) = 8\left(\frac{-4t+3t}{256t^4}\right) = -\frac{t}{32t^4} = -\frac{1}{32t^3}$. Es liegt bei x_{tW} tatsächlich ein Vorzeichenwechsel von $f_t\,''$ vor, also folgt insgesamt, dass der Graph von f_t dort einen Wendepunkt hat mit $W(-3t \mid -\frac{8}{9t})$. (Alternativ: $x = -3t$ ist eine einfache Nullstelle von $f_t\,''$; also liegt ein Vorzeichenwechsel vor.)	21	21	

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung, Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>



</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>

Ortskurve der Extrempunkte $E(-2t|-\frac{1}{t})$:

$x_E = -2t \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}x_E$

t eingesetzt in $y_E = -\dfrac{1}{t}$ *ergibt* $y_E = -\dfrac{1}{-\frac{1}{2}x_E} = \dfrac{2}{x_E}$.

Also liegen alle Extrempunkte auf der Kurve C mit $C(x) = \dfrac{2}{x},\ x \neq 0$.

Genauer: für $x < 0$ beschreibt C die Kurve aller Tiefpunkte und für $x > 0$ beschreibt C die Kurve aller Hochpunkte.

Für wachsendes t (ausgehend von $t = 1$) wandert die Nullstelle nach links, der Tiefpunkt ebenfalls und der Tiefpunkt nähert sich der x-Achse. Für $x > 0$ entfernt sich der Graph immer weiter von der x - Achse.

Für fallendes t (ausgehend von $t = 1$) wandert die Nullstelle immer näher zur y-Achse, der Tiefpunkt auch. Zugleich sinkt der Tiefpunkt immer tiefer. Für $x > 0$ nähert sich der Graph immer mehr der x-Achse.

</td><td>6</td><td>12</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

Den Flächeninhalt $FL(x)$ des Rechtecks erhält man aus:

$$FL(x) = x \cdot f_1(x) = x\left(\frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = \frac{4(x^2 + x)}{x^2} = \frac{4(x+1)}{x} = 4 + \frac{4}{x}.$$

$$FL'(x) = -\frac{4}{x^2}.$$

Es gibt also keine relativen Extrema des Flächeninhalts, deshalb müssen die Ränder untersucht werden:

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$\lim\limits_{x\to\infty} FL(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{4}{x}\right) = 4$ *und* $\lim\limits_{x\to 0} FL(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(4+\frac{4}{x}\right) = \infty$. Die Werte des Flächeninhalts liegen also im Intervall $]4;\infty[$.		7	5
e)	Für $t > 0$ ist $f_t(x) > 0$ (folgt aus Aufgabenteil a)), so dass das Integral $\int_2^\infty f_t(x)dx$ zu untersuchen ist. $\int_2^\infty f_t(x)dx = \int_2^\infty\left(\frac{4}{x}+\frac{4t}{x^2}\right)dx = \left[4\ln(x) - \frac{4t}{x}\right]_2^\infty = \infty,$ *da* $\lim\limits_{x\to\infty} 4\ln(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4t}{x} = 0.$ Der Flächeninhalt ist also nicht endlich. Für $t < 0$ ist zu beachten, dass die Nullstelle bei $x_{t_0} = -t$ liegt und dass $f_t(x)$ für $x > -t$ positiv ist, da z.B. der Hochpunkt $H(-2t \mid -\frac{1}{t})$ eine positive y-Koordinate hat. Ist $-t < 2$, ist also auch das Integral $\int_2^\infty f_t(x)dx$ zu berechnen, das aus den gleichen Argumenten wie oben nicht endlich ist. Für $-t > 2$ ist der Flächeninhalt über dem Intervall $[2; -t]$ endlich und das Integral $\int_{-t}^\infty f_t(x)dx = \infty$, also ist der gesamte Flächeninhalt auch nicht endlich. Insgesamt folgt, dass für alle $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ der Flächeninhalt nicht endlich ist.		8	10
	Insgesamt 100 BWE	37	48	15

Aufgabe 2: Wurzelfunktionsschar **Gy, GS, TG, WG**

Aufgabenstellung

Gegeben ist die folgende Funktionenschar

$$f_a : x \rightarrow \sqrt{ax^2 - x^4} \quad \text{mit } a > 0.$$

a) Bestimmen Sie

1) die Definitionsmenge D_{f_a} von f_a
2) die Nullstellen von f_a
3) die Extrempunkte von f_a
4) die Wendepunkte von f_a.

b) Untersuchen Sie das Verhalten der Graphen der Funktionen f_a in der Umgebung der Nullstellen.

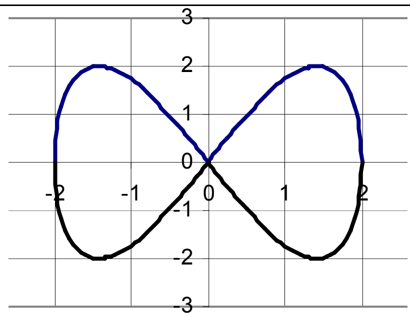
c) Geben Sie eine zweite Funktionenschar g_a an, deren Graphen symmetrisch zu den Graphen der Funktionenschar f_a bzgl. der x-Achse liegen. Die Punkte der Vereinigung beider Graphen bilden eine Relation. Geben Sie die Gleichung dieser Relation an und zeichnen Sie den Graphen der Relation für $a = 4$.

d) Der Graph der Relation umschließt eine Punktmenge in der x-y-Ebene. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieser Punktmenge in Abhängigkeit von a.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Funktionen f_a der Schar sind definiert für alle $x \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ mit $ax^2 - x^4 \geq 0$. Hieraus erhält man nach kurzer Rechnung $-\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$. Also gilt für die Definitionsmenge: $$D_{f_a} = \left[-\sqrt{a};\sqrt{a}\right].$$ Die Nullstellen der Funktionenschar f_a sind die Lösungen der Gleichung $f_a(x) = 0$. Aus dem Ansatz $\sqrt{ax^2 - x^4} = 0$ erhält man somit für f_a die Nullstellen: $$x = 0 \quad \vee \quad x = -\sqrt{a} \quad \vee \quad x = \sqrt{a}\,.$$ Für die Bestimmung der Extrem- und Wendepunkte werden mindestens die ersten beiden Ableitungsfunktionen f_a' *und* f_a'' benötigt. Mit Hilfe der Kettenregel erhält man: $$f_a' : x \to \frac{ax - 2x^3}{\sqrt{ax^2 - x^4}} \quad mit\ D_{f_a'} = D_{f_a} \setminus \left\{-\sqrt{a}\ ;\ 0\ ;\ \sqrt{a}\right\}$$ $$f_a'' : x \to \frac{2x^6 - 3ax^4}{\sqrt{ax^2 - x^4}^{\,3}} \quad mit\ D_{f_a''} = D_{f_a'}\,.$$ Für die zweite Ableitung sind einige Termumformungen notwendig. Extremwertverdächtige Stellen sind nach der notwendigen Bedingung für die Existenz lokaler Extremstellen die Nullstellen der ersten Ableitung. Man erhält: $$f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow ax - 2x^3 = 0 \wedge x \in D_{f_a'}$$ $$\Leftrightarrow x(a - 2x^2) = 0 \wedge x \in D_{f_a'}$$ $$\Leftrightarrow x = -\sqrt{\frac{a}{2}} \vee x = \sqrt{\frac{a}{2}}$$ Mit Hilfe der hinreichenden Bedingung für die Existenz lokaler Extremstellen erhält man die Aussagen: Wegen $f_a'\left(-\sqrt{\frac{a}{2}}\right) = 0 \wedge f_a''\left(-\sqrt{\frac{a}{2}}\right) = -a^2 < 0$ besitzen die Funktionen f_a im Punkt $\left(-\sqrt{\frac{a}{2}}\,;\, f_a\left(-\sqrt{\frac{a}{2}}\right)\right) = \left(-\sqrt{\frac{a}{2}}\,;\,\frac{a}{2}\right)$ ein lokales Maximum.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Wegen $f_a'\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)=0 \;\wedge\; f_a''\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)=-a^2<0$ besitzen die Funktionen f_a im Punkt $\left(\sqrt{\frac{a}{2}} \mid f_a\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)\right)=\left(\sqrt{\frac{a}{2}} \mid \frac{a}{2}\right)$ ebenfalls ein lokales Maximum. Mögliche Wendestellen sind die Nullstellen der zweiten Ableitung. Es gilt: $f_a''(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x^6-3ax^4=0 \quad\wedge\quad x\in D_{f_a''}$ $\Leftrightarrow x^2=\frac{3}{2}a \quad\wedge\quad x\in D_{f_a''}$. Wegen $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}a}\notin D_{f_a''}$ besitzen die Funktionen f_a keine Wendestellen.	14	35	
b)	Die Nullstellen $x_1=-\sqrt{a}$ und $x_2=\sqrt{a}$ von f_a sind reine Nennernullstellen von f_a'. Somit besitzt f_a' an den Rändern der Definitionsmenge D_{f_a} zwei Polstellen. Der Graph von f_a trifft also jeweils senkrecht auf die x-Achse. Auch die Nullstelle $x_3=0$ von f_a ist eine Definitionslücke von f_a'. Im Fall $x<0$ gilt: $\lim\limits_{x\to 0} f_a'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(a-2x^2)}{\lvert x\rvert\sqrt{a-x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-(a-2x^2)}{\sqrt{a-x^2}}=-\sqrt{a}$. Im Fall $x>0$ gilt: $\lim\limits_{x\to 0} f_a'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(a-2x^2)}{\lvert x\rvert\sqrt{a-x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a-2x^2)}{\sqrt{a-x^2}}=\sqrt{a}$. f_a' ist somit an der Stelle $x=0$ nicht stetig ergänzbar und f_a an der Stelle $x=0$ nicht differenzierbar. Der Graph von f_a besitzt dort also einen Knick.			17
c)	Die Graphen der Funktionenscharen $f_a: x\to\sqrt{ax^2-x^4}$ und $g_a: x\to-\sqrt{ax^2-x^4}$ liegen symmetrisch zur x-Achse. Für die Punkte der Vereinigung beider Graphen gilt daher: $y=\sqrt{ax^2-x^4} \quad\vee\quad y=-\sqrt{ax^2-x^4} \Leftrightarrow y^2=ax^2-x^4 \Leftrightarrow y^2-ax^2+x^4=0$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Im Fall $a = 4$ ergibt sich für die Relation der nachfolgende Graph. Für eine hinreichend genaue Zeichnung sollten zusätzlich zu den aus den anderen Aufgabenteilen bekannten Punkten mindestens 10 weitere Stützstellen verwendet werden. 		10	3
d)	Aus Symmetriegründen gilt für den gesuchten Flächeninhalt A: $A = 4\int_0^{\sqrt{a}} f_a(x)\,dx = 4\int_0^{\sqrt{a}} \sqrt{ax^2 - x^4}\,dx = 4\int_0^{\sqrt{a}} \sqrt{x^2\left(a - x^2\right)}\,dx.$ Die Auswertung des Integrals erfolgt mit Hilfe der Substitutionsregel unter Verwendung der Substitution $t = a - x^2$. Ohne größere Schwierigkeiten erhält man damit: $A = -2\int_a^0 \sqrt{t}\,dt = -2\cdot\left[\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_a^0 = \frac{4}{3}\sqrt{a^3}.$		21	
	Insgesamt 100 BWE	14	66	20

Aufgabe 3: Tumor-Wachstum **Gy, GS**

Funktionsuntersuchung, Differentialgleichungen, logistisches Wachstum.
Quelle: Jahnke/Wuttke, Mathematik - Analysis, Cornelsen.

Aufgabenstellung

Für viele Tumorarten kann das Wachstum der Größe eines Tumors $V(t)$ durch die folgenden beiden Gleichungen beschrieben werden:

(1) $\frac{d}{dt}V(t) = r(t)\cdot V(t)$ und (2) $\frac{d}{dt}r(t) = -c\cdot r(t)$.

Dabei stehen t für die Zeit mit $t \geq 0$, V für das Tumorvolumen, $r(t)$ für die zeitabhängige Wachstumsrate des Tumors. c ist eine positive Konstante, $r(0) = b$ die anfängliche Wachstumsrate mit $b > 0$.

a) Ermitteln Sie Lösungen der Gleichung (2) und zeigen Sie, dass $V(t) = V(0)\cdot e^{\frac{b}{c}\cdot\left(1-e^{-c\cdot t}\right)}$ die Gleichung (1) erfüllt.

b) Nun sollen Sie einige Eigenschaften der Funktion V erforschen.

b1) Sei zunächst $V(0) = 5$, $b = 1$ und $c = 0{,}8$.
Untersuchen Sie diese spezielle Funktion mit geeigneten Mitteln so, dass Sie eine Skizze des Graphen der Funktion V anfertigen können.
Hinweis: $V''(t) = V(t)\cdot e^{-0{,}8\,t}\cdot(e^{-0{,}8\,t} - 0{,}8)$

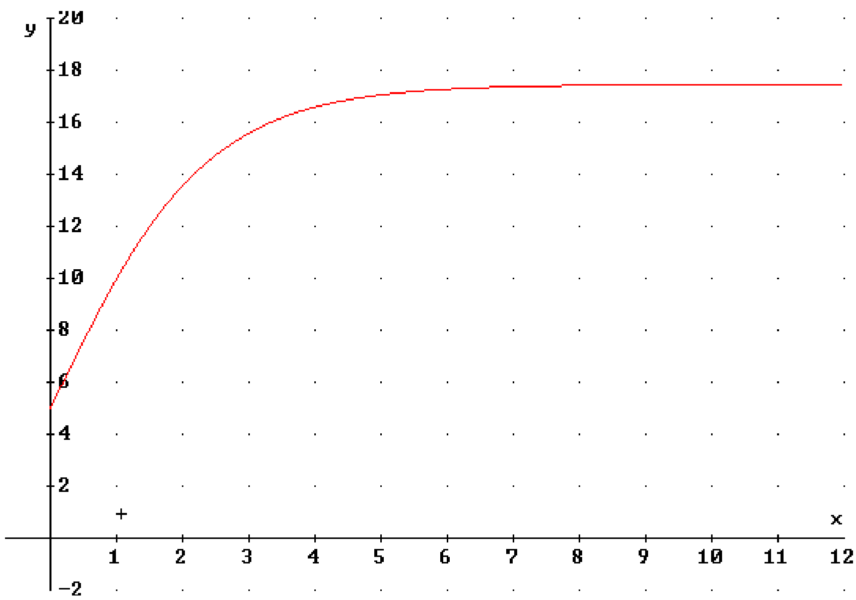
b2) Versuchen Sie, Ihre Erkenntnisse von b1) zu verallgemeinern: Welche Eigenschaften hat eine beliebige Funktion V in Abhängigkeit von b und c?

c) Interpretieren Sie die Gleichungen (2) und (1).
Welche Aussagen kann man über das Tumorwachstum nach diesem Modell machen?

d) Die Modellierung des Tumorwachstums mit der Funktion V von Aufgabenteil a) beginnt mit der Entdeckung des Tumors. Dieser Zeitpunkt wird $t = 0$ genannt.
Will man feststellen, ob das Modell auch bei einer besonders frühen Entdeckung noch die Realität hinreichend genau beschreibt, muss man Kenntnisse über Eigenschaften der Funktion V für $t < 0$ haben.

Beschreiben Sie diese Eigenschaften auch unter Verwendung Ihrer Erkenntnisse von Aufgabenteil b).

Erwartungshorizont

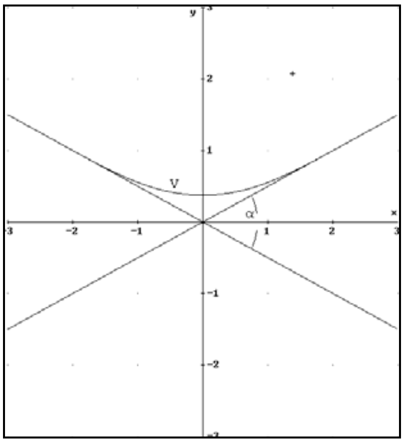
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Lösung der Gleichung 2: $r(t) = k \cdot e^{-ct}$ denn $r'(t) = k \cdot (-c) \cdot e^{-ct} = -c \cdot r(t)$. Es reicht als Lösung auch $r(t) = e^{-ct}$, da der „Fehler“ bei der Berechnung von V' bemerkt wird und k als Faktor ergänzt werden kann. Vorgegebene Funktion V erfüllt (1): $V(t)$ wird (nach t) abgeleitet: $V'(t) = V(0) \cdot \left[\frac{b}{c} \cdot \left(1 - e^{-c \cdot t}\right)\right]' \cdot e^{\frac{b}{c} \cdot \left(1 - e^{-c \cdot t}\right)} = V(t) \cdot b \cdot e^{-c\,t}$ entspricht der Behauptung (mit der speziellen Lösung von $r(t) = b \cdot e^{-ct}$, also $k = r(0) = b$).		10	5
b)	b1) $V_{\text{speziell}}(t) = 5 \cdot e^{1,25 \cdot (1 - e^{-0,8\,t})}$ Definitionsbereich nach dem Text der Aufgabe $\mathbb{R}^+_0$, Wertebereich $V(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{D}$, da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Rechter Rand ($t \to \infty$): $e^{-0,8\,t}$ strebt gegen 0, daher gilt $V(t) \to 5 \cdot e^{1,25} \approx 17{,}45$. Werte für $t = 0$, Extrema: $V(0) = 5$ (Startwert gegeben). $V'(t) = V(t) \cdot e^{-0,8 \cdot t}$ stets > 0 für alle t, also keine Extremwerte. $V'(0) = 5$: Steigung an der y-Achse beträgt fast 80°. Wendepunkt: $V''(t) = V'(t) \cdot e^{-0,8 \cdot t} - 0{,}8 \cdot V(t) \cdot e^{-0,8 \cdot t} = V(t) \cdot e^{-0,8 \cdot t} \cdot (e^{-0,8 \cdot t} - 0{,}8)$. $V''(t)$ kann nur 0 werden, wenn die rechte Klammer 0 ist, denn die anderen beiden Faktoren sind stets positiv: $e^{-0,8 \cdot t} - 0{,}8 = 0 \Rightarrow$ $-0{,}8 \cdot t_W = \ln 0{,}8 \Rightarrow t_W \approx 0{,}28$, $V(t_W) = 5 \cdot e^{0,25} \approx 6{,}42$. Also Wendepunkt in $W(0{,}28 \mid 6{,}42)$, da Vorzeichenwechsel von V'' bei t_W. 			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	b2) Verallgemeinerung: Definitions- und Wertebereich unverändert. Rechter Rand analog: $V(t) \to V(0) \cdot e^{\frac{b}{c}}$. $V(0)$ gegebener Startwert. Werte für $t = 0$, Extrema: $V'(t) = V(t) \cdot b \cdot e^{-c \cdot t} > 0$, daher keine Extremwerte. $V'(0) = V(0) \cdot b$: Steigung an der y-Achse. Wendepunkt: $V''(t) = V'(t) \cdot b \cdot e^{-c \cdot t} - c \cdot V(t) \cdot b \cdot e^{-c \cdot t} = V(t) \cdot b \cdot e^{-c \cdot t} \cdot (b \cdot e^{-c \cdot t} - c)$ $V''(t)$ kann analog nur 0 werden, wenn die rechte Klammer 0 ist: $b \cdot e^{-c \cdot t} - c = 0 \Rightarrow t_W = -\frac{1}{c} \cdot \ln\frac{b}{c}$. Fall 1: $b > c \Rightarrow t_W$ ist negativ und daher nicht im Definitionsbereich. Keine Wendepunkte. Fall 2: sonst $\Rightarrow W\left(-\frac{1}{c} \cdot \ln\frac{b}{c} \,\middle\vert\, V(0) \cdot e^{\frac{b}{c} \cdot (1 - \frac{b}{c})}\right)$, Begründung wie bei b1). Der Graph der allgemeinen Funktion V verläuft daher prinzipiell so wie in b1).	20	35	
c)	Gleichung (2) drückt aus, dass die Wachstumsrate exponentiell abnimmt ($c > 0$, also $-c < 0$ und $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Gleichung (1) bedeutet, dass das Volumen des Tumors entsprechend der Wachstumsrate wächst: Volumenänderung *(lokal)* = Wachstumsrate · Volumen. Die Untersuchungen in b) haben gezeigt, dass das Wachstum nach dem Modell nicht nur stets langsamer wird, sondern dass der Tumor gegen ein maximales Ausmaß strebt, welches nicht überschritten wird *(Verhalten am rechten Rand)*.		5	10
d)	Zu untersuchen bleibt das Verhalten am linken Rand, also $t \to -\infty$. $e^{-\text{ große Zahl}} \to \infty$, damit geht der gesamte Exponent gegen $-\infty$, also $V(t) \to 0$. Die x-Achse ist daher Asymptote am linken Rand des Definitionsbereiches. Nach b2) liegt in Abhängigkeit von der Größe der Parameter b und c mit $b > c$ noch der Wendepunkt links von der y-Achse. (Auch eine Untersuchung der konkreten Funktion von b1) wäre angemessen.)		15	
	Insgesamt 100 BWE	20	65	15

Aufgabe 4: Straßenkreuzung **Gy, GS, TG**

Funktionsbestimmung anhand vorgegebener Bedingungen in einem Anwendungsbezug, Flächenberechnung durch Integration (mit Stammfunktion und numerisch).
Die Aufgabe entspricht mit kleinen Veränderungen der Abituraufgabe LK 2001/3 aus Baden-Württemberg.

Aufgabenstellung



Zwei gradlinig verlaufende Straßen bilden an ihrer Kreuzung einen Winkel α von etwa 53°. Diese Kreuzung soll durch ein zusätzliches Straßenstück entlastet werden. Die Situation kann in einem geeigneten Koordinatensystem durch zwei Geraden und eine Verbindungskurve V dargestellt werden. (Siehe Skizze, Maßangaben in km.)
Dabei soll die Verbindungskurve V durch den Graphen einer Funktion f beschrieben werden.
V mündet an den Stellen –2 und 2 ohne Knick und ohne Krümmungssprung in die Geraden ein.
Hinweis: Ohne Krümmungssprung bedeutet, dass die Bedingungen $f''(-2) = f''(2) = 0$ gelten.

a) a1) Zeigen Sie, dass man für die beiden Geraden g_1 mit $g_1(x) = \frac{1}{2}x$ und g_2 mit $g_2(x) = -\frac{1}{2}x$ verwenden kann.

a2) Welchen weiteren Bedingungen muss die Funktion *f* deshalb genügen? Es sind die Funktion und die erste Ableitung zu benutzen. Erläutern Sie Ihre Ansätze.

a3) Zeigen Sie nun, dass $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ einen möglichen Ansatz darstellt, wenn alle genannten Bedingungen erfüllt sein sollen und bestimmen Sie *f* für den vorliegenden Fall. (Hinweis für die Weiterbearbeitung: $f(x) = -\frac{1}{128}x^4 + \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{8}$.)

b) Ein weiterer Vorschlag sieht als Verbindungskurve den Graphen der Funktion *h* vor mit $h(x) = 1 + \ln(\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2})$.
Prüfen Sie, ob diese Verbindungskurve ebenfalls die Bedingungen aus Aufgabenteil a) erfüllen. Zeichnen Sie diese Verbindungskurve und die Geraden aus dem Aufgabenteil a) in ein geeignetes Koordinatensystem.

c) Die beiden Vorschläge aus den Teilaufgaben a) und b) sollen hinsichtlich des Landschaftsverbrauchs verglichen werden, indem der Inhalt des Flächenstücks zwischen den Geraden und der Verbindungskurve bestimmt wird.
Berechnen Sie den Inhalt jeweils über dem Intervall [–2;2]

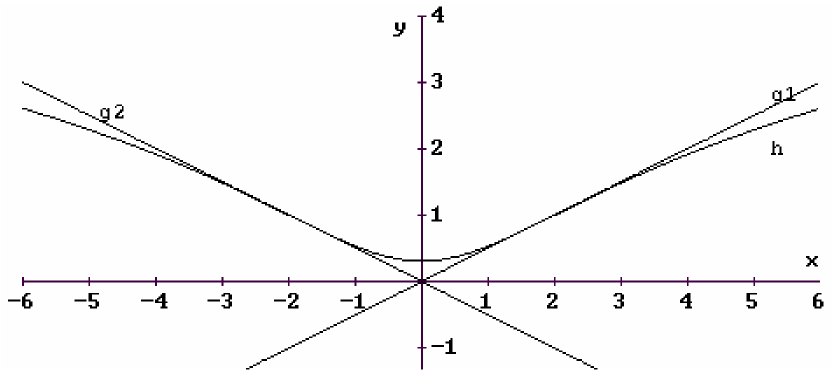
c1) für den Vorschlag *f* aus dem Aufgabenteil a) exakt,

c2) für den Vorschlag *h* aus dem Aufgabenteil b) numerisch (8 Teilintervalle reichen).

d) Erstellen Sie einen dritten Vorschlag t für die Verbindungsfunktion auf der Grundlage einer trigonometrischen Funktion.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	a1) Die Gerade g_1 schließt mit der positiven x-Achse den Winkel $\alpha = \tan^{-1}(\frac{1}{2}) = \arctan(\frac{1}{2}) \approx 26{,}6°$ ein. Da g_1 und g_2 achsensymmetrisch zueinander sind, schließen sie einen Winkel von etwa $2 \cdot 26{,}6° = 53{,}2°$ ein, also etwa 53°. a2) Die Funktion f muss an der Stelle –2 den gleichen Funktionswert wie g_2 haben, d. h. $f(-2) = g_2(-2) = 1$. Entsprechend gilt: $f(2) = g_1(2) = 1$. Außerdem muss f in den Punkten $P(-2\|1)$ bzw. $Q(2\|1)$ die Kurve nur berühren, also die gleiche Steigung haben. D. h. $f'(-2) = g_2'(-2) = -\frac{1}{2}$ und $f'(2) = g_1'(2) = \frac{1}{2}$. a3) Die beiden Geraden g_1 und g_2 sowie die beiden Berührpunkte liegen symmetrisch zur y-Achse. Wählt man einen ganz rationalen Ansatz mit einer Funktion vierten Grades, so treten nur gerade Potenzen von x auf. Auf Grund der Symmetrie müssen nur noch die Bedingungen $f(2) = 1, f'(2) = \frac{1}{2}$ und $f''(2) = 0$ erfüllt werden. Diese drei Bedingungen führen auf drei lineare Gleichungen für die Koeffizienten der ganz rationalen Funktion f. Für eine eindeutige Lösung benötigt man also als Ansatzfunktion eine ganz rationale Funktion mit drei Koeffizienten. Dies leistet die Funktion f mit $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Es gilt mit diesem Ansatz: $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ und $f''(x) = 12ax^2 + 2b$. Man erhält nun die drei Bedingungen: $f(2) = 1 = 16a + 4b + c$ (1) $f'(2) = \frac{1}{2} = 32a + 4b$ (2) $f''(2) = 0 = 48a + 2b$ (3) $(32a + 4b) - 2(48a + 2b) = \frac{1}{2} - 2 \cdot 0$ folgt aus $(2) - 2(3)$ $-64a = \frac{1}{2}$ $a = -\frac{1}{128}$. Dieses Ergebnis eingesetzt in (2) ergibt $32 \cdot \left(-\frac{1}{128}\right) + 4b = \frac{1}{2}$, also $b = \frac{3}{16}$. Dieses Ergebnis in (1) eingesetzt ergibt $c = \frac{3}{8}$. Also erhält man insgesamt: $f(x) = -\frac{1}{128}x^4 + \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{8}$.	15	15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
b)	Die Bedingungen werden nacheinander überprüft. $h(-2)=1+\ln(\frac{1}{8}(-2)^2+\frac{1}{2})=1+\ln(1)=1$. Entsprechend $h(2)$=1. $h'(x)=\frac{\frac{1}{8}2x}{\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}}=\frac{2x}{x^2+4}$. Damit folgt $h'(-2)=\frac{2\cdot(-2)}{(-2)^2+4}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$ und entsprechend $h'(2)=\frac{1}{2}$. $h''(x)=\frac{2(x^2+4)-2x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2}$. Damit folgt $h''(-2)=\frac{-2(-2)^2+8}{((-2)^2+4)^2}=0$ und entsprechend $h''(2)=0$.  Hinweis: Hier wäre auch eine Symmetrieüberlegung zur Abkürzung der Rechnungen möglich.	10	10	
c)	c1) Auf Grund der Symmetrie von f und von g_1 und g_2 zueinander reichte es, die Berechnung des auf dem Intervall [0;2] vorzunehmen. Alle Funktionen sind im untersuchten Intervall nicht negativ und haben dort nur den Schnittpunkt $Q(2\|1)$. $FL_f=2\int_0^2\left(f(x)-g_1(x)\right)dx=2\int_0^2\left(-\frac{1}{128}x^4+\frac{3}{16}x^2+\frac{3}{8}-\frac{1}{2}x\right)dx$ $=2\left[-\frac{1}{640}x^5+\frac{1}{16}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{8}x\right]_0^2=\frac{2}{5}=0{,}4$ Der gesamte verbrauchte Flächeninhalt FL_f bei der Streckenführung mit der Funktion f beträgt 0,4. c2) h ist auch symmetrisch zur y-Achse. Das liegt daran, dass x nur quadratisch im Funktionsterm auftritt. Entsprechend zum Teil c1) kann man sich wieder nur auf das Intervall [0;2] beschränken. Da insgesamt 8 Unterteilungen zu berücksichtigen waren, kann nun das Intervall in 4 Teile unterteilen. Als numerische Integrationsmethode wird hier die Rechteckmethode genommen. $FL_h\approx 2\cdot\frac{2}{4}\left((h-g_1)(\frac{1}{4})+(h-g_1)(\frac{3}{4})+(h-g_1)(\frac{5}{4})+(h-g_1)(\frac{7}{4})\right)$ $=(0{,}1974+0{,}0634+0{,}0116+0{,}0004)$ $=0{,}2728$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Der gesamte verbrauchte Flächeninhalt FL_h bei der Streckenführung mit der Funktion h beträgt 0,2728.	10	15	
d)	Von den üblichen trigonometrischen Funktionen ist nur die Kosinusfunktion symmetrisch zur y-Achse. Deshalb wird der Einfachheit halber diese Funktion angepasst. Dazu muss der Graph an der x-Achse gespiegelt ($\cos(x) \to -\cos(x)$)und in Richtung der y-Achse verschoben werden ($-\cos(x) \to -\cos(x)+v$). Zusätzlich müssen die Periode ($-\cos(x)+v \to -\cos(p\cdot x)+v$) und die Amplitude ($-\cos(p\cdot x)+v \to -a\cdot\cos(p\cdot x)+v$) angepasst werden. Es wird nun der Ansatz $t(x) = -a\cdot\cos(p\cdot x)+v,\ mit\ a,\ p \neq 0$ untersucht. (1) $t'(x) = a\cdot p\cdot\sin(p\cdot x)$ und (2) $t''(x) = a\cdot p^2\cdot\cos(p\cdot x).$ (3) Die Bedingungen aus Teil a) müssen erfüllt werden. $t(2) = 1 = -a\cdot\cos(p\cdot 2)+\nu$ (4) $t'(2) = \frac{1}{2} = a\cdot p\cdot\sin(p\cdot 2)$ (5) $t''(2) = 0 = a\cdot p^2\cos(p\cdot 2)$ (6) Aus (6) folgt $\cos(p\cdot 2) = 0$ und damit $p\cdot 2 = \frac{1}{2}\pi + 2\pi\cdot z$ mit $z\in\mathbb{Z}$. Günstig ist es, $z = 0$ zu wählen, so dass $p = \frac{1}{4}\pi$ folgt. Dieses Ergebnis wird in (5) eingesetzt: $\frac{1}{2} = a\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot\sin(\frac{1}{2}\pi)$. Da $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$ gilt, erhält man $\frac{1}{2} = a\cdot\frac{1}{4}\pi$, also $a = \frac{2}{\pi}$. Die beiden Ergebnisse für p und a werden nun in (4) eingesetzt: $1 = -\frac{2}{\pi}\cdot\cos(\frac{1}{2}\pi)+v$. Da $\cos(\frac{1}{2}\pi) = 0$ ist, folgt $v = 1$. Insgesamt erhält man nun $t(x) = 1 - \frac{2}{\pi}\cdot\cos(\frac{1}{4}\pi\cdot x)$.		10	15
	Insgesamt 100 BWE	35	50	15

Aufgabe 5: Energieverbrauch **Gy, GS**

Untersuchung von Wachstum beschreibenden Funktionen mit Anwendung auf den Energieverbrauch eines Landes.

Die Aufgabe entspricht inhaltlich der Abituraufgabe LK 2001/2 aus Baden-Württemberg.

Aufgabenstellung

Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$f(x) = \frac{2}{1+e^{x}} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{2}{1+e^{1-x}} \text{ , jeweils } x \in \mathbb{R}.$$

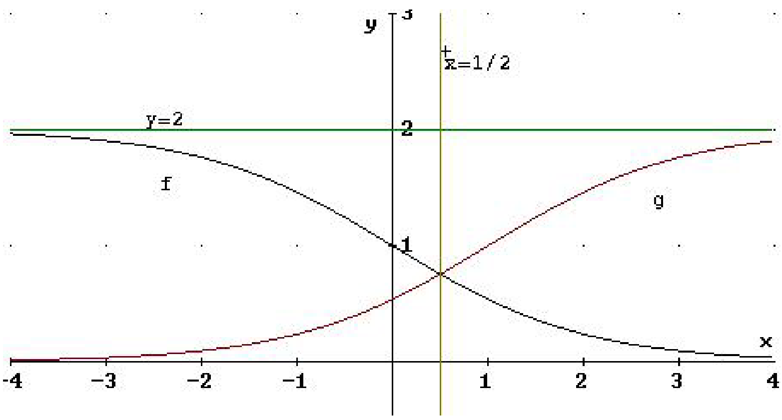
a) Betrachten Sie zunächst die Funktion f.
Ermitteln Sie die Asymptoten und den Wendepunkt des Graphen von f.
Untersuchen Sie das Monotonieverhalten und geben sie den Wertebereich von f an.
Zeichnen Sie den Graphen von f samt Asymptoten.

b) Zeigen Sie, dass der Graph von g aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der Geraden $x = \frac{1}{2}$ entsteht.
Fügen Sie eine Skizze des Graphen von g in Ihr Koordinatensystem aus Teilaufgabe a) ein.
Bestimmen Sie den Wertebereich und das Monotonieverhalten von g sowie den Wendepunkt des Graphen von g.

c) Weisen Sie nach, dass die Funktion g die Differentialgleichung
$$g'(x) = \tfrac{1}{2} g(x) \cdot [2 - g(x)] \quad \text{erfüllt.}$$
Welche Form von Wachstum wird demzufolge von g beschrieben?
Geben Sie charakteristische Eigenschaften dieser Wachstumsform an.

d) Untersuchungen haben ergeben, dass die momentane Änderungsrate des Energieverbrauchs (in 10^8kWh/Jahr) eines Landes seit 1990 in guter Näherung durch $g(x)$ mit $x \geq 0$ (x in Jahren ab Anfang 1990) beschrieben werden kann.
Zu welchem Zeitpunkt erreicht diese momentane Änderungsrate 98 % ihres Sättigungswertes?
In welchem Jahr verlangsamt sich erstmals die Zunahme der momentanen Änderungsrate des Energieverbrauchs?
Berechnen Sie den gesamten Energieverbrauch im Zeitraum von Anfang 1990 bis Ende 2000.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Da f in ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, kann der Graph von f keine senkrechten Asymptoten besitzen. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{1+e^x} = 0$, da die Exponentialfunktion für $x \to \infty$ auch gegen ∞ geht. Die x-Achse ist also waagerechte Asymptote für $x \to \infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{1+e^x} = 2$, da die Exponentialfunktion für $x \to -\infty$ gegen 0 geht. Die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ ist also waagerechte Asymptote für $x \to -\infty$. Die Ableitungen der Funktion f erhält man mit der Quotienten- und der Kettenregel: $$f'(x) = \frac{-2e^x}{(1+e^x)^2}\ ,\ f''(x) = \frac{2e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}\ ,\ f'''(x) = \frac{-2e^{3x}+8e^{2x}-2e^x}{(1+e^x)^4}.$$ Die notwendige Bedingung für die Existenz einer Wendestelle ist $f''(x) = 0$. $\dfrac{2e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3} = 0 \Leftrightarrow 2e^x(e^x-1) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$, da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Da $f'''(0) = \frac{1}{4} \neq 0$ und $f(0) = 1$ gilt, besitzt der Graph von f den Wendepunkt $(0 \mid 1)$. (Alternativ kann auf die Berechnung von $f'''(x)$ verzichtet werden, wenn der Vorzeichenwechsel von $f''(x)$ an der Stelle 0 gezeigt wird.) Da die erste Ableitung von f für alle $x \in \mathbb{R}$ negativ ist, ist die Funktion f streng monoton fallend. Der Wertebereich von f ist $]0;\,2[$, da die waagerechten Asymptoten den Gleichungen $y = 2$ und $y = 0$ genügen und die Funktion f streng monoton fallend ist.  	16	20	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
b)	Um die Achsensymmetrie zur Geraden $x = \frac{1}{2}$ nachzuweisen, zeigt man, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(\frac{1}{2} - x) = g(\frac{1}{2} + x)$ erfüllt ist. $f(\frac{1}{2} - x) = \frac{2}{1 + e^{\frac{1}{2}-x}} = \frac{2}{1 + e^{1-(\frac{1}{2}+x)}} = g(\frac{1}{2} + x)$. Skizze siehe Lösung Teil a) Der Wertebereich von g entspricht dem von f, da der Graph von g durch Spiegelung an der Geraden $x = \frac{1}{2}$ aus dem Graphen von f entsteht. Die Funktion g ist streng monoton steigend, da f streng monoton fallend ist. Der Wendepunkt (0 | 1) des Graphen von f wird durch die beschriebene Achsenspiegelung auf den Wendepunkt (1 | 1) des Graphen von g abgebildet.		16	
c)	Einsetzen des Funktionsterms von g in die rechte Seite der Differentialgleichung und einfache Termumformungen ergeben: $\frac{1}{2} g(x) \cdot [2 - g(x)] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1 + e^{1-x}} \cdot (2 - \frac{2}{1 + e^{1-x}}) = \frac{1}{1 + e^{1-x}} \cdot \frac{2 + 2e^{1-x} - 2}{1 + e^{1-x}}$ $= \frac{2e^{1-x}}{(1 + e^{1-x})^2} = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also erfüllt g die Differenzialgleichung. Diese Differentialgleichung beschreibt ein logistisches Wachstum mit Sättigungsgrenze 2. Logistisches Wachstum, das durch eine Funktion h beschrieben wird, erfüllt die Differentialgleichung $h'(x) = k \cdot h(x) \cdot (S - h(x))$. Bei zunehmendem Argument nähert sich *h(x)* der Sättigungsgrenze *S*, bleibt aber stets darunter. Die momentane Änderungsrate von *h(x),* d .h. *h'(x),* nimmt zu, wenn $h(x) < \frac{1}{2} S$ ist und nimmt ab, wenn $h(x) > \frac{1}{2} S$ gilt. Ihr Maximum ist bei $h(x) = \frac{1}{2} S$. Für kleine Argumente wird *h* näherungsweise durch ein exponentielles Wachstum beschrieben. Für große Argumente wird *h* näherungsweise durch ein beschränktes Wachstum mit Sättigungsgrenze *S* beschrieben.		22	
d)	Der Sättigungswert von g ist 2. Zu berechnen ist das Argument x_1, für das der Funktionswert 1,96 beträgt. $1{,}96 = \frac{2}{1 + e^{1-x_1}} \Leftrightarrow 1{,}96 + 1{,}96e^{1-x_1} = 2 \Leftrightarrow e^{1-x_1} = \frac{1}{49} \Leftrightarrow 1 - x_1 = \ln(\frac{1}{49})$ $\Leftrightarrow x_1 = 1 - \ln(\frac{1}{49}) \Rightarrow x_1 \approx 4{,}89$ 98% der Sättigungsgrenze wird also gegen Ende des Jahres 1994 erreicht.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Die Zunahme der momentanen Änderungsrate verlangsamt sich ab dem Zeitpunkt x_2, für den der Funktionswert gleich der Hälfte des Sättigungswertes ist. $g(x_2)=0{,}5\cdot 2 \Leftrightarrow \frac{2}{1+e^{1-x_2}}=1 \Leftrightarrow 1=e^{1-x_2} \Leftrightarrow 0=1-x_2 \Leftrightarrow x_2=1$ Ab dem Beginn des Jahres 1991 verlangsamt sich die momentane Änderungsrate des Energieverbrauchs. Der gesamte Energieverbrauch E wird als Integral von g über den Zeitraum von 0 bis 11 Jahren berechnet. $E=\int_0^{11} g(x)dx=\int_0^{11}\frac{2}{1+e^{1-x}}dx=2\cdot\int_0^{11}\frac{e^x}{e^x+e}dx=2\cdot\left[\ln(e^x+e)\right]_0^{11}$ $=2\cdot(\ln(e^{11}+e)-\ln(e^0+e))\approx 19{,}37$ Der gesamte Energieverbrauch zwischen Anfang 1990 und Ende 2000 beträgt ca. $19{,}4\cdot 10^8$kWh.		10	16
	Insgesamt 100 BWE	16	68	16

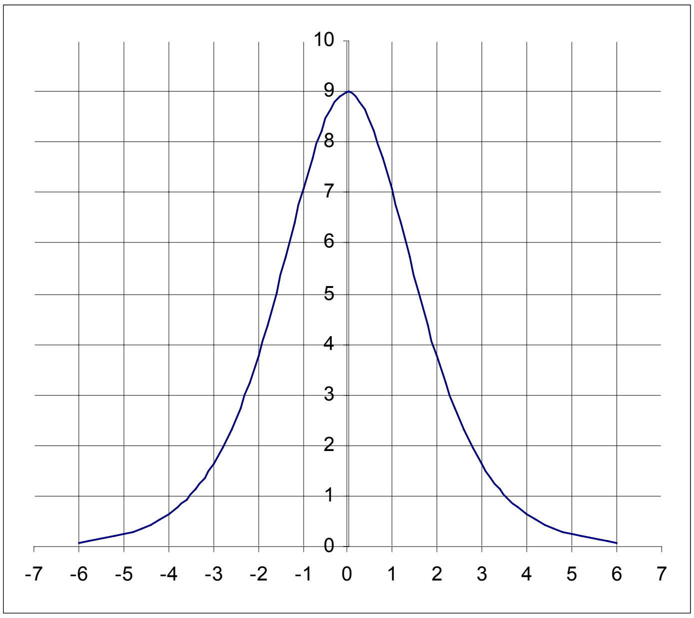
Aufgabe 6: Schimmelpilz **Gy, GS**

Dieser Aufgabe liegt die Leistungskurs-Aufgabe 2002/2 aus dem Zentralabitur Baden-Württemberg zu Grunde.

Aufgabenstellung

Für jedes $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = \frac{a \cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^2} \quad , \ x \in \mathbb{R}.$$



a) Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f_a.

Bestimmen Sie den Zahlenwert des zugehörigen Parameters a.
Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes der Graphen von f_{36} und g.

Für welche Werte von a hat der Graph von f_a mit dem Graphen der Funktion g einen Punkt gemeinsam?

b) Zeigen Sie: Für jedes $a \neq 0$ gilt $f_a(x) = f_a(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph von f_a und die x-Achse begrenzen eine beidseitig ins Unendliche reichende Fläche. Zeigen Sie, dass diese Fläche einen endlichen Flächeninhalt hat.

c) Durch $F(t) = \dfrac{36e^t}{1+e^t}$ wird der Inhalt der Fläche beschrieben, die ein Schimmelpilz auf einer Brotscheibe bedeckt. Dabei wird t in Tagen seit Beobachtungsbeginn und $F(t)$ in cm^2 gemessen.

Zu welchem Zeitpunkt breitet sich der Schimmelpilz am schnellsten aus?

Wie groß ist die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit?

Weisen Sie nach, dass F eine Differentialgleichung der Form

$$F'(t) = k \cdot F(t) \cdot \left[G - F(t)\right]$$

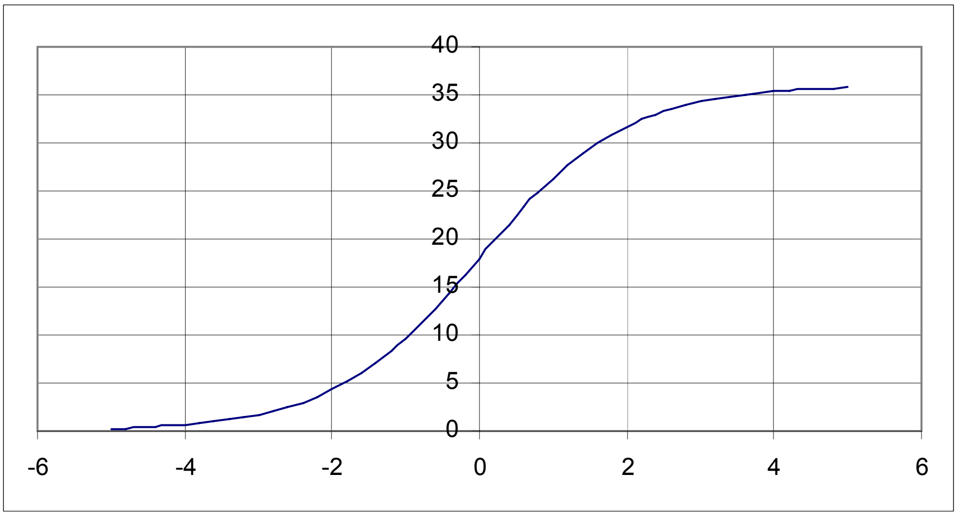
erfüllt. Welche Art von Wachstum liegt demnach vor?

Skizzieren Sie den Graphen von F für $-5 \le t \le 5$.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Bestimmung des Parameters *a*: Der in der Aufgabe dargestellte Graph der Funktion f_a verläuft durch den Punkt (0 | 9). Damit gilt: $f_a(0)=9 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a \cdot e^0}{\left(1+e^0\right)^2}=9$ $\Leftrightarrow \quad \frac{a}{4}=9$ $\Leftrightarrow \quad a=36.$ Bestimmung des gemeinsamen Punktes der Graphen von g und f_{36}: Die Schnittstellen der Graphen von *g* und f_{36} sind die Lösungen der Gleichung $f_{36}(x_s)=g(x_s)$. Dieser Ansatz ergibt: $\frac{36e^{x_s}}{\left(1+e^{x_s}\right)^2}=e^{x_s} \quad \Leftrightarrow \quad 36=\left(1+e^{x_s}\right)^2, \quad da \quad e^{x_s}>0$ $\Leftrightarrow \quad 1+e^{x_s}=6, \qquad da \quad 1+e^{x_s}>1$ $\Leftrightarrow \quad e^{x_s}=5$ $\Leftrightarrow \quad x_s=\ln(5).$ Wegen *g*(ln(5)) = 5 haben f_{36} und g den Punkt (ln(5) | 5) gemeinsam. Bedingung für gemeinsame Punkte: Eine beliebige Schnittstelle x_T der Graphen von *g* und f_a ist eine Lösung der Gleichung $f_a(x_T)=g(x_T)$. Dies liefert: $\frac{ae^{x_T}}{\left(1+e^{x_T}\right)^2}=e^{x_T} \quad \Leftrightarrow \quad a=\left(1+e^{x_T}\right)^2.$ Aus $e^{x_T}>0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt $\left(1+e^{x_T}\right)^2>1$. Daher ist die Gleichung $a=\left(1+e^{x_T}\right)^2$ nur lösbar für *a* > 1. Es gilt dann $1+e^{x_T}=\sqrt{a}$ und man erhält schließlich $x_T=\ln\left(\sqrt{a}-1\right)$. Nur im Fall *a* > 1 besitzen die Graphen von f_a und *g* einen gemeinsamen Punkt und dies ist dann der Punkt $\left(\ln\left(\sqrt{a}-1\right) \mid \sqrt{a}-1\right)$.	10	30	
b)	Untersuchung der Symmetrie: Für jedes $a \neq 0$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f_a(-x)=\frac{ae^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}=\frac{ae^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}\cdot\frac{e^{2x}}{e^{2x}}=\frac{ae^x}{\left(\left(1+e^{-x}\right)e^x\right)^2}=\frac{ae^x}{\left(e^x+1\right)^2}=f_a(x).$ Der Graph von f_a ist somit für jedes $a \neq 0$ symmetrisch zur y-Achse.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Flächeninhaltsberechnung: Der gesuchte Flächeninhalt der beidseitig bis ins Unendliche reichenden Fläche zwischen dem Graphen von f_a und der x-Achse sei A. Aufgrund der Achsensymmetrie zur y-Achse gilt: $A = \left\| 2 \cdot \int\limits_0^{\infty} f_a(x)\,dx \right\| = 2 \cdot \left\| \lim\limits_{z\to\infty} \int\limits_0^{z} f_a(x)\,dx \right\| = 2\|a\| \cdot \lim\limits_{z\to\infty} \int\limits_0^{z} \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\,dx$. Somit wird zunächst eine Stammfunktion für $\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}$ ermittelt. Hierzu wird die Substitutionsregel mit der Substitution $t = 1 + e^x$ verwendet. Wenige leichte Umformungsschritte ergeben: $\int \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} = \frac{-1}{1+e^x}$. Damit ergibt die Flächenberechnung: $A = 2\|a\| \lim\limits_{z\to\infty} \int\limits_0^{z} \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\,dx = 2\|a\| \lim\limits_{z\to\infty} \left[\frac{-1}{1+e^x}\right]_0^z = 2\|a\| \lim\limits_{z\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^z}\right) = 2\|a\| \cdot \frac{1}{2} = \|a\|$.		10	20
c)	Die Funktion F mit $F(t) = \frac{36e^t}{1+e^t}$ gibt die zum Zeitpunkt t bedeckte Fläche an. Dann ist $F'(t)$ die momentane Ausbreitungsgeschwindigkeit (oder Änderungsrate). Da die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schimmelpilzes ermittelt werden soll, muss F' auf lokale Extremstellen untersucht werden. Es gilt: $F'(t) = 36\,\frac{e^t\left(1+e^t\right) - e^t e^t}{\left(1+e^t\right)^2} = 36\,\frac{e^t}{\left(1+e^t\right)^2} = f_{36}(t)$. Zu dieser Funktion gehört der in der Aufgabenstellung angegebene Graph. Damit besitzt F' offensichtlich ein lokales Maximum an der Stelle $t = 0$. Ferner gilt: $F'(0) = 9$. Damit hat der Schimmelpilz zum Zeitpunkt $t = 0$ die größte Ausbreitungsgeschwindigkeit von $9\,\frac{\text{cm}^2}{\text{Tag}}$. Der Nachweis der Differentialgleichung erfolgt durch Einsetzen. Man erhält: $k\;F(t)\;\left[G - F(t)\right] = k\;\frac{36e^t}{1+e^t}\;\left[G - \frac{36e^t}{1+e^t}\right]$ $= 36k\;\frac{e^t}{1+e^t}\;\left[\frac{G\left(1+e^t\right) - 36e^t}{1+e^t}\right]$ $= 36k\;\frac{e^t}{1+e^t}\;\left[\frac{G + \left(G-36\right)e^t}{1+e^t}\right]$. Wählt man nun $G = 36$ und $k = \frac{1}{36}$ erhält man $k\;F(t)\;\left[G - F(t)\right] = F'(t)$.			

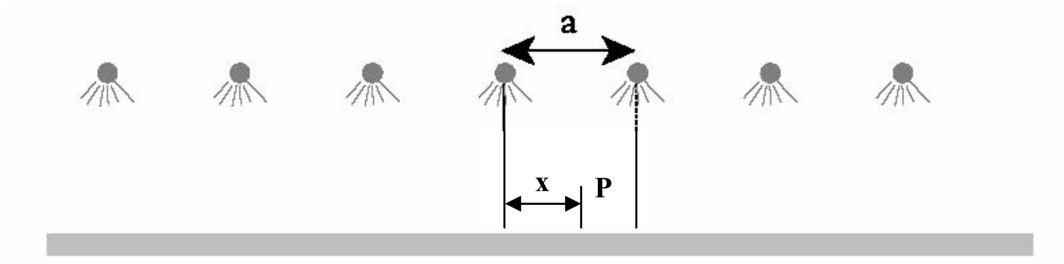
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Offenbar handelt es sich um logistisches Wachstum. 		30	
	Insgesamt 100 BWE	10	70	20

Aufgabe 7: Beleuchtung Gy, GS

Die Aufgabe entspricht mit Veränderungen der Aufgabe 3 aus dem „Centralexamen 1998, Wiskunde A", 1. Termin, (Niederlande).

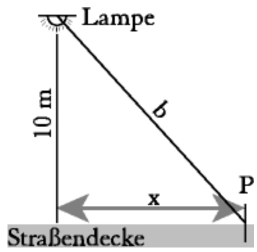
Aufgabenstellung

Bei der Installation von einer Straßenbeleuchtung soll zumeist sicher gestellt sein, dass es überall entlang des erleuchteten Weges ungefähr gleich hell ist (die Helligkeit oder Beleuchtungsstärke misst man in *Lux)* und nicht etwa zwischen zwei Lampen erheblich dunkler als direkt unter der Lampe. Um dies zu erreichen, könnte man die Lampen in besonders kurzen Abständen aufstellen, was dann aber zu unvertretbar hohen Kosten führen würde.
In dieser Aufgabe sollen nun Hilfsmittel zur Lösung des geschilderten Problems erörtert werden.



Für einen neu anzulegenden Weg möchte man optimale Lichtverhältnisse zu vertretbaren Kosten schaffen. Die Lampen sollen in gleichen Abständen stehen, der Abstand zwischen zwei Lampen sei a (Meter). Eine Person im Punkt P zwischen den Lampen habe vom Lot der linken Lampe auf die Straße den Abstand x Meter (siehe Skizze).

Die Person im Punkt P bekommt Anteile vom Licht der beiden benachbarten Lampen, aber auch etwas von weiter entfernten.
Der Abstand der Lampe zu einem Punkt P auf der Straßendecke sei b (Meter). In unserem Modell sollen die Lampen jeweils 10m über der Straßendecke montiert sein. Es gilt also pro Lampe die nebenstehende Situation. Die Beleuchtungsstärke im Punkt P bezogen auf eine Lampe nennen wir S (in Lux).



Für S gilt: $S(b) = \dfrac{100.000}{b^3}$.

a) a1) Interpretieren Sie $S(b)$.

a2) Berechnen Sie den Abstand x, falls die Beleuchtungsstärke S (bezogen auf eine Lampe) im Punkt P halb so groß ist wie direkt unter der Lampe.

a3) Für Berechnungen zur Ausleuchtung der Straße wäre die Angabe der Beleuchtungsstärke in Abhängigkeit von x ja viel angenehmer. Nennen wir diese Funktion S_2. Stellen Sie einen Term für $S_2(x)$ auf.

[Hinweis: $S_2(x) = \dfrac{100.000}{\left(x^2+100\right)^{1,5}}$]

a4) Der Abstand a zwischen je zwei Lampen betrage $a = 20$ m und der Punkt P befinde sich in der Mitte der Straße. Von einer Lampe habe er den Abstand 6 m.
Bestimmen Sie einen sinnvollen Näherungswert für die Gesamtbeleuchtungsstärke im Punkt P.

b) Entwickeln Sie für die Baubehörde einen konkreten Vorschlag für eine 200 m lange Straße mit Begründungen für Ihre Lösung. Dabei soll die Strasse überall hinreichend hell beleuchtet sein und die Kosten vertretbar bleiben.

c) c1) Bestimmen Sie mit Hilfe einer numerischen Integration eine Näherung für $\int_0^{20} S_2(x)dx$.

c2) Welche Bedeutung hat der Zahlenwert $2 \cdot \frac{\int_0^{20} S_2(x)dx}{20}$?

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	I	II	III
a)	a1) $S(b)$ ist umgekehrt proportional zu b^3, d.h. starke Abnahme der Beleuchtungsstärke (3. Potenz) bei Zunahme des Abstands. a2) Beleuchtungsstärke unter der Lampe: $S(10) = \frac{100.000}{1.000} = 100$. Halb so große Beleuchtungsstärke ist 50 Lux. Ansatz: $50b^3 = 100.000 \Leftrightarrow b^3 = 2.000 \Rightarrow b = \sqrt[3]{2.000} \approx 12{,}6$. Nach dem Satz des Pythagoras ist $100 + x^2 = b^2$, also $x^2 = b^2 - 100$, also $x \approx 7{,}7$. Da wir Abstände berechnen, kommen jeweils nur die nichtnegativen Lösungen in Frage. Bezogen auf eine Lampe ist die Lichtstärke bei einem Abstand von etwa 7,7 m von der Lampe etwa halb so groß wie direkt unter der Lampe.	5 10		
	a3) Wie schon oben angegeben ist $b^2 = x^2 + 100$, also $b = \sqrt{x^2+100}$. Eingesetzt erhält man: $S_2(x) = S\left(\sqrt{x^2+100}\right) = \frac{100.000}{\left(x^2+100\right)^{1,5}}$.	10		
	a4) Für $x_1 = 6$ und $x_2 = 14$ berechnen wir: $S_2(6) \approx 63{,}05$ und $S_2(14) \approx 19{,}64$. Hinzu kommt aber auch noch Licht von weiter entfernten Lampen. Zunächst nehmen wir noch die linke Lampe ($x_3 = 26$) und die rechte ($x_4 = 34$) und berechnen hierzu die Beleuchtungsstärken: $S_2(26) \approx 4{,}63$ und $S_2(34) \approx 2{,}25$. Auch von den noch weiter entfernten Lampen kommt noch etwas Licht hinzu, was wir aber jetzt vernachlässigen wollen, da diese Werte jeweils weit kleiner als 1 sein werden. Allerdings machen wir so einen Fehler. Die Gesamtbeleuchtungsstärke an der betrachteten Stelle ist die Summe: 63,05 + 19,64 + 4,63 + 2,25 (Lux) ≈ 89,6 (Lux).		20	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
b)	Man kann beispielsweise den Lampenabstand a und eine Stelle zwischen zwei Lampen mit dem Abstand x von der linken Lampe betrachten und den funktionalen Zusammenhang $S_3(x,a)$ untersuchen zwischen x und a als Argumenten und der an der Stelle herrschenden Beleuchtungsstärke S_3 als zugehörigem Wert. Bei Berücksichtigung von 4 benachbarten Lampen (vgl. a4) erhält man folgenden Funktionsterm: $S_3(x,a) = S_2(x) + S_2(a-x) + S_2(a+x) + S_2(2a-x)$. Mit guter Begründung könnte man aber auch nur die beiden benachbarten Lampen berücksichtigen und käme zu $\widetilde{S_3}(x,a) = S_2(x) + S_2(a-x)$. Am dunkelsten wird es genau in der Mitte zwischen zwei Lampen sein, also für $x = \frac{a}{2}$. Darum berechnen wir einige für verschiedene Abstände a und für $x = 0$ und $x = \frac{a}{2}$ zugehörige Werte von S_3 bzw. $\widetilde{S_3}$. Wir berechnen einige Werte von $S_3(x,a)$ und $\widetilde{S_3}(x,a)$:			

a	15	17	20	25
$x = 0$	137	128	119	110
$x = \frac{a}{2}$	116	98	77	52

a	15	16	20	25
$x = 0$	117	115	109	105
$x = \frac{a}{2}$	102	95	71	49

		I	II	III
	Wenn wir davon ausgehen, dass der Wert 100 Lux unter einer einzelnen Lampe dort gut genug ausleuchtet, so hätte man für $a = 17$ ($a = 16$) in der Mitte (Minimum) zwischen 2 Lampen noch 98 (95) Lux, also fast 100 Lux. Man käme dann für die 200 m mit 12 (13) Lampen aus. Die Offenheit der Aufgabenstellung bringt es mit sich, dass natürlich auch ganz andere Argumentationen und Formalisierungen zu erfolgreichen Darstellungen führen können.		15	15
c)	c1) $\int_0^{20} S_2(x)dx \approx 4 \cdot \sum_{k=0}^{4} S_2\left((2k+1)\cdot 2\right) \approx 895$. c2) $2 \cdot \frac{\int_0^{20} S_2(x)dx}{20} \approx 89{,}5$. Bei einem Lampenabstand von 20 m hat man zwischen 2 Lampen ohne Berücksichtigung weiterer Lampen noch eine mittlere Ausleuchtung von ca. 90 Lux.		15	5
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 8: Luftvolumen der Lunge **Gy, GS, TG**

Trigonometrische Funktionen im Modellierungskontext. Die Aufgabe entspricht mit Veränderungen einer Beispielaufgabe in den Einheitlichen Prüfungsanforderungen der KMK (EPA vom Mai 2002).

Aufgabenstellung

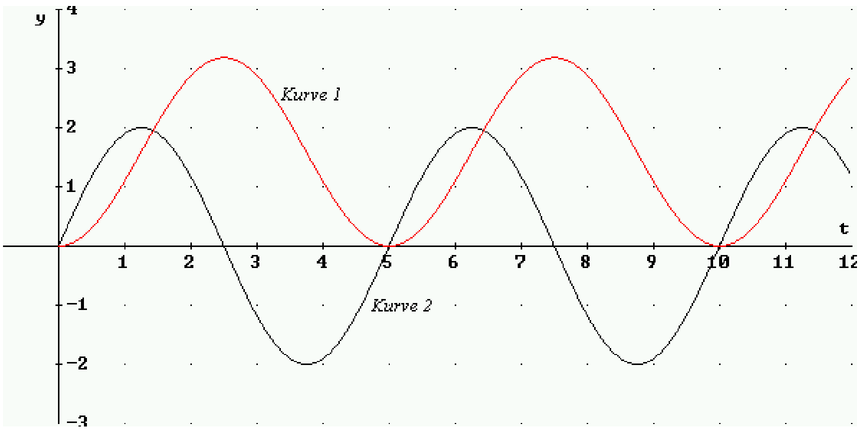
Die momentane Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge eines Menschen kann durch die Funktion f mit $f(t) = 2\cdot\sin(\frac{2}{5}\pi\cdot t)$ modelliert werden (dabei ist t Zeit in Sekunden, $f(t)$ Liter pro Sekunde). Wir nehmen vereinfachend an, dass zur Zeit $t = 0$ keine Luft in der Lunge ist.

a) Welche Bedeutung hat die Funktion F mit $F(t) = \int_0^t f(x)dx$ im Kontext der Aufgabe?

Berechnen Sie das Integral und damit $F(t)$.

Hinweis: Es gilt $F(t) = \frac{5}{\pi}\cdot\left(1-\cos(\frac{2\pi}{5}\cdot t)\right)$.

b) Das nachfolge Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge und den zeitlichen Verlauf der momentanen Änderungsrate des Luftvolumens.



Welche der beiden Kurven beschreibt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge? Begründen Sie Ihre Wahl im Sachkontext der Aufgabenstellung.

Bestimmen Sie das maximale und das minimale Luftvolumen in der Lunge.

Bestimmen Sie Zeitpunkte, zu denen die Lunge jeweils die Hälft des maximalen Luftvolumens enthält.

c) Wie groß ist das durchschnittliche Luftvolumen in der Lunge während des Zeitintervalls [0;5]?

d) Entgegen obiger Annahme bleibt immer Luft in der Lunge. Erneut vereinfachend nehmen wir an, dass diese minimale Luftmenge in der Lunge konstant sei.

Der Atemvorgang laufe ansonsten wie in Aufgabenteil b) ermittelt ab.

Welche Änderungen ergeben sich in den Kurven 1 und 2 (siehe Abbildung Aufgabenteil b))?
Wie wirken sich die Änderungen auf die beiden Funktionsterme aus?

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Als Umkehrung der Differentialrechnung ist das Integral dann der Weg zurück zum „Bestand“, d.h. $F(t)$ beschreibt das Luftvolumen. $2\cdot\int_0^t \sin(\frac{2}{5}\pi\cdot x)dx = 2\cdot\left[-\cos(\frac{2}{5}\pi\cdot x)\cdot\frac{1}{\frac{2}{5}\pi}\right]_0^t = \frac{5}{\pi}\cdot\left[-\cos(\frac{2}{5}\pi\cdot x)\right]_0^t =$ $= \frac{5}{\pi}\cdot\left(1-\cos(\frac{2}{5}\pi\cdot t)\right)$		15	15
b)	Das Luftvolumen nimmt beim Einatmen zu, beim Ausatmen ab, kann jedoch nicht negativ werden, also kommt nur Kurve 1 in Frage. Kurve 2 beschreibt dazu die lokale Änderung, ist also die Ableitung von Kurve 1. Das Intervall [0;5] beschreibt eine vollständige Periode. An der Stelle $t = 0$ ist nach Vereinbarung das Luftvolumen 0, also minimal, daher wegen der Periodizität auch bei t = 5. An der Stelle $t = 2{,}5$ hat f eine Nullstelle (von plus nach minus), daher hat F dort ein Maximum. Es ist $2\cdot\int_0^{2,5} \sin(\frac{2}{5}\pi\cdot x)dx = \frac{5}{\pi}\cdot(1-\cos\pi) = \frac{5}{\pi}\cdot 2 = \frac{10}{\pi} \approx 3{,}2.$ Das maximale Luftvolumen tritt im Modell nach 2,5 Sekunden ein und beträgt etwa 3,2 Liter. Das zum Zeitintervall [0 ; 2,5] gehörende Kurvenstück von f ist symmetrisch zu $t = 1{,}25$. Die Lunge ist also 1,25 Sekunden nach Beginn des Einatmens halb gefüllt, was analog auch für $t = 3{,}75$ oder 1,25 Sekunden vor dem Ende des Ausatmens gilt.	20	20	
c)	Die Berechnung des mittleren Luftvolumens kann mittels Integrieren gelöst werden: $\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{\pi}\int_0^5\left(1-\cos(\frac{2\pi}{5}\cdot x)\right)dx = \frac{1}{\pi}\cdot 5 - \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^5 \cos(\frac{2\pi}{5}\cdot x)dx = \frac{5}{\pi} - 0 = \frac{5}{\pi} \approx 1{,}6$. Das mittlere Luftvolumen beträgt also etwa 1,6 Liter.		15	
	Sei die minimale Luftmenge c. Dann verschiebt sich Kurve 1 um c in y-Richtung, Kurve 2 bleibt als lokale Änderungsrate gleich. Zum bisherigen Term von F wird c addiert: $F(t) = \frac{5}{\pi}\cdot\left(1-\cos(\frac{2\pi}{5}\cdot\pi)\right)+c$, $f(t)$ bleibt unverändert.		15	
	Insgesamt 100 BWE	20	65	15

Aufgabe 9: ICE-Trasse TG

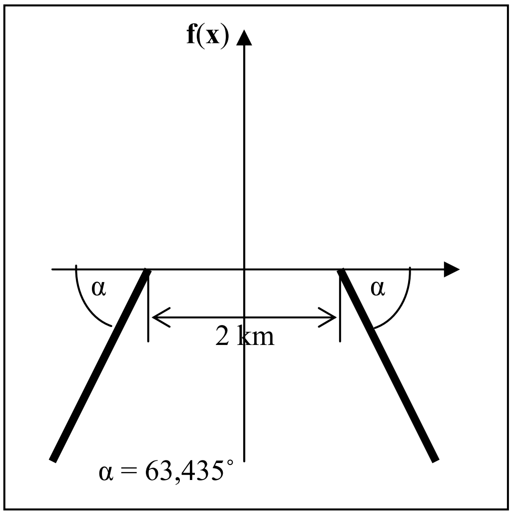
Zur Lösung dieser Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler ihre Kenntnisse und Fertigkeiten zur Funktions-synthese und -analyse auf drei unterschiedliche Funktionstypen anwenden. Außerdem müssen die in diesem Zusammenhang benötigten Bedingungen im Kontext eines praxisorientierten Anwendungs-falles ermittelt werden.

Aufgabenstellung

Für eine ICE-Trasse müssen zwei gerade Streckenabschnitte miteinander verbunden werden.

Es stehen 4 verschiedene Funktionsvarianten zur Diskussion:

1. Eine ganzrationale Funktion möglichst niedrigen Grades
2. Ein Kreisbogen
3. Eine Winkelfunktion der Form
   $x \to a \cdot \cos(b \cdot x) + c$
4. Eine Exponentialfunktion der Form
   $x \to a \cdot e^{-b \cdot x^2} + c$



a) Beschreiben Sie die Anforderungen, die an den Verbindungsgraphen gestellt werden müssen und geben Sie die mathematischen Bedingungen an.

b) Eine der angegebenen Funktionsarten kann nicht alle erforderlichen Bedingungen erfüllen und kommt daher nicht in Frage.
Geben Sie an, welche Funktion das ist und begründen Sie Ihre Entscheidung.

c) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der drei anderen Funktionen.

d) Um die Verbindungstrasse mit möglichst hoher Geschwindigkeit durchfahren zu können, soll die Variante mit dem größten minimalen Krümmungsradius gewählt werden.
Der Krümmungsradius einer Funktion kann mit Hilfe folgender Formel berechnet werden:

$$r = \frac{\sqrt{(1 + f'(x)^2)^3}}{f''(x)} .$$

Bestimmen Sie für die gefundenen Funktionen den minimalen Krümmungsradius und geben Sie an, welche Funktion gewählt werden sollte.

e) Um die Bahntrasse realisieren zu können, muss die Fläche zwischen der Verbindungstrasse und der Geraden zwischen A und B von einem Landwirt gekauft werden.

Berechnen Sie diese Fläche für die in Aufgabenteil d) gewählte Funktion.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Verbindungstrasse muss die Anschlusspunkte A und B mit der gleichen Steigung wie die Geraden und ohne Krümmungsruck verbinden. Daraus ergeben sich folgende Bedingungen: 1. $f(A) = f(B) = 0$ 2. $f'(A) = \tan 63{,}435 = 2, \quad f'(B) = -2$ 3. $f''(A) = f''(B) = 0$		10	10
b)	Ein Kreisbogen kann die dritte Bedingung nicht erfüllen und scheidet daher aus.		10	
c)	1. Ganzrationale Funktion Da die Verbindungstrasse achsensymmetrisch ist, hat die Funktion nur gerade Exponenten. Eine quadratische Funktion kann die dritte Bedingung nicht erfüllen (keine Wendepunkte). Die Funktion hat daher die Form $f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$. $f(1) = 0: \quad 0 = a_4 + a_2 + a_0$ $f'(-1) = 2: \quad 2 = 4a_4 + 2a_2 + a_0$ $f''(1) = 0: \quad 0 = 12a_4 + 2a_2$. Durch Lösen des LGS ergeben sich die Koeffizienten: $a_4 = \frac{1}{4}$, $a_2 = -\frac{3}{2}$, $a_0 = \frac{5}{4}$ $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}$. 3. Winkelfunktion: $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x) + c$ Da die Kosinusfunktion in ihren Wendepunkten den Funktionswert $f(x) = 0$ hat, ist $c = 0$. Die Nullstellen der Funktion liegen bei $x = -1$ und $x = 1$, daher ist $b = \frac{\pi}{2}$. $f'(x) = -\frac{\pi}{2}a \cdot \sin(\frac{\pi}{2}x)$ $f'(1) = -\frac{\pi}{2}a = -2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{4}{\pi}$ $f(x) = \frac{4}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}x)$			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>4. Exponentialfunktion
$f(x)=a\cdot e^{-b\cdot x^2}+c$
$f(1)=0$: $0=a\cdot e^{-b}+c$
$f'(1)=-2$: $-2=-2abe^{-b}$
$f'(x)=a(-2bx)\cdot e^{-bx^2}$
$f''(x)=e^{-bx^2}(-2ab+4ab^2x^2)$
$f''(1)=e^{-b}(-2ab+4ab^2)=0 \quad\Rightarrow\quad 2ab=4ab^2$
$\Rightarrow \quad b=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad a=2\sqrt{e} \quad\Rightarrow\quad c=-2$
$f(x)=2\sqrt{e}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2}-2$</td><td></td><td>15</td><td>15</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Die minimalen Krümmungsradien liegen bei $x = 0$:
$r=\frac{\sqrt{(1+f'(x)^2)^3}}{f''(x)}$.
1. Ganzrationale Funktion: $r=-\frac{1}{3}$
2. Winkelfunktion: $r=-\frac{1}{\pi}=-0{,}318$
3. Exponentialfunktion: $r=-\frac{1}{2\sqrt{e}}=-0{,}303$
Da die ganzrationale Funktion den größten minimalen Radius aufweist, kann diese Variante mit der größten Geschwindigkeit durchfahren werden und sollte aus dieser Sicht gewählt werden.</td><td></td><td>30</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>$A=\int_{-1}^{1} f(x)dx=\left[\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{4}x+C\right]_{-1}^{1}=1{,}6$
oder (etwas eleganter):
$A=\int_{0}^{1} f(x)dx=2\cdot\left[\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{4}x+C\right]_{0}^{1}=1{,}6$.
Für die Realisierung des Vorhabens muss eine Fläche von 1,6 km² Land gekauft werden.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>10</td><td>65</td><td>25</td></tr>
</table>

Aufgabe 10: Preispolitik WG

Die Aufgabe erfordert Kenntnisse aus dem Bereich Wirtschaft.

Aufgabenstellung

Ein Industrieunternehmen A, das nur ein Produkt herstellt, entnimmt seiner Betriebsbuchhaltung (Kosten- und Leistungsrechnung) folgende Angaben:
Der Kostenverlauf ist gekennzeichnet durch ständig steigende Gesamtkosten wobei der Kostenzuwachs mit jeder produzierten Einheit unterschiedlich ist. Anfänglich nimmt der Kostenzuwachs bedingt durch effizienteren Arbeitskräfte- und Maschineneinsatz ab. Von einer bestimmten Produktionsmenge an ist der Kostenzuwachs jedoch durch höheren Energieverbrauch und Maschinenverschleiß steigend.
Von den Gesamtkosten des Unternehmens sind die folgenden Zahlen bekannt: Die fixen Kosten belaufen sich auf 20 GE, der Graph der Kostenfunktion hat im Punkt $P(3|56)$ einen Wendepunkt und bei einer Produktionsmenge von 1 ME entstehen Kosten in Höhe von 42 GE.
Die Kapazitätsgrenze des Betriebes liegt bei 9 ME und es wird beliebige Teilbarkeit der Mengeneinheiten (ME) unterstellt.

Hinweis: Alle zu skizzierenden Funktionsgraphen sind in einem Koordinatensystem darzustellen. Wählen Sie dabei für die Ordinate 20 GE = 1cm und für die Abszisse 1 ME = 1 cm.

a) Zeigen Sie mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems, dass die „einfachste“ Kostenfunktion wie folgt lautet:

$$K_A: \ K_A(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 20 .$$

Geben Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich an und skizzieren Sie den Graphen der Kostenfunktion.

b) Das Industrieunternehmen A ist polypolistischer Anbieter auf dem Markt. Die Preisfunktion ist demnach eine Konstante und sie lautet: $p(x) = 26$.

b1) Zeigen Sie, dass die Gleichung der Gewinnfunktion wie folgt lautet:

$$G_A: \ G_A(x) = -x^3 + 9x^2 - 4x - 20 .$$

b2) Ermitteln Sie die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze, die gewinnmaximale Produktions-/ Absatzmenge sowie den maximalen Gewinn, und skizzieren Sie den Graphen der Gewinnfunktion.

c) Ein Konkurrenzunternehmen B hat in seinem Betrieb durch Beobachtung der Kostenentwicklung in Abhängigkeit von der produzierten Menge folgende Grenzkostenfunktion bestimmt:

$$K_B': \ K_B'(x) = \tfrac{1}{x+e} + \tfrac{1}{8}x^3 .$$

c1) Zeigen Sie, dass bei fixen Kosten von 30 GE die Kostenfunktion wie folgt lautet:

$$K_B: \ K_B(x) = \ln(x+e) + \tfrac{1}{32}x^4 + 29 .$$

c2) Zeigen Sie durch geeignete Rechnungen, dass sich bei der vorliegenden Kostensituation des Unternehmens B die Graphen der Grenzkosten und der Stückkosten im Minimum der Stückkosten schneiden. Die entsprechende Produktionsmenge soll nicht errechnet werden.

c3) Bestimmen Sie für den gegebenen Marktpreis von 26 GE mit Hilfe eines geeigneten Näherungsverfahren die Gewinnschwelle des Unternehmens B und führen Sie das Verfahren solange durch, bis sich die dritte Nachkommastelle nicht mehr ändert.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Die „einfachste“ Funktion, die den vorgegebenen Kostenverlauf mit einem Wendepunkt erfüllt, wäre eine ganzrationale Funktion 3. Grades:

$\mathbf{K_A(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$
$K_A'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$K_A''(x) = 6ax + 2b$

$\begin{array}{lll} K_A(0) = 20: & \text{I.} & d = 20 \\ K_A(3) = 56: & \text{II.} & 27a + 9b + 3c + d = 56 \\ K_A''(3) = 0: & \text{III.} & 18a + 2b = 0 \\ K_A(1) = 42: & \text{IV.} & a + b + c + d = 42 \end{array}$

$d = 20$ einsetzen in II. und IV.:

$\begin{array}{rcr|c|c} 27a + 9b + 3c & = & 36 & 1 & \\ 18a + 2b & = & 0 & & 1 \\ a + b + c & = & 22 & -3 & \end{array}$

$\begin{array}{rcr|c|} 24a + 6b & = & -30 & 1 \\ 18a + 2b & = & 0 & -3 \end{array}$

$\begin{array}{rcr|l} -30a & = & -30 & : (-30) \\ a & = & 1 & \end{array}$

Stufenweises Einsetzen führt zu:
$b = -9$
$c = 30$
$\Rightarrow K_A : K_A(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 20$

$D_{Ök} = [0;9]$.

(Funktionsgraph von K_A siehe Abbildung)</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>b1) $G_A(x) = E(x) - K_A(x)$
$E(x) = p(x) \cdot x = 26x$
$\Rightarrow G_A : G_A(x) = 26x - \left(x^3 - 9x^2 + 30x + 20\right) = -x^3 + 9x^2 - 4x - 20$

b2) <u>Gewinnschwelle und Gewinngrenze:</u>
$Bed: G_A(x) = 0$
$-x^3 + 9x^2 - 4x - 20 = 0 \quad / \cdot (-1)$
$x^3 - 9x^2 + 4x + 20 = 0 \qquad (durch\ \ Probieren\ \ x_1 = 2)$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

Horner Schema:

$$\begin{array}{l|cccc}
 & 1 & -9 & 4 & 20 \\
 & 0 & 2 & -14 & -20 \\
\hline
x=2 & 1 & -7 & -10 & 0
\end{array} \quad \Rightarrow x_1 = 2$$

$$x^2 - 7x - 10 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{89}{4}}$$

$x_2 \approx 8{,}22$; $\quad x_3 \approx -1{,}22 \notin D_{Ök}$

Die Gewinnschwelle (GS) liegt bei $x = 2$ ME und die Gewinngrenze (GG) bei $x \approx 8{,}22$ ME.

<u>Gewinnmaximum:</u>

$$Bed: \quad G'(x) = 0 \ \ und \ \ G''(x) \neq 0$$

$$G_A'(x) = -3x^2 + 18x - 4$$

$$G_A''(x) = -6x + 18$$

$$\Rightarrow \quad -3x^2 + 18x - 4 = 0$$

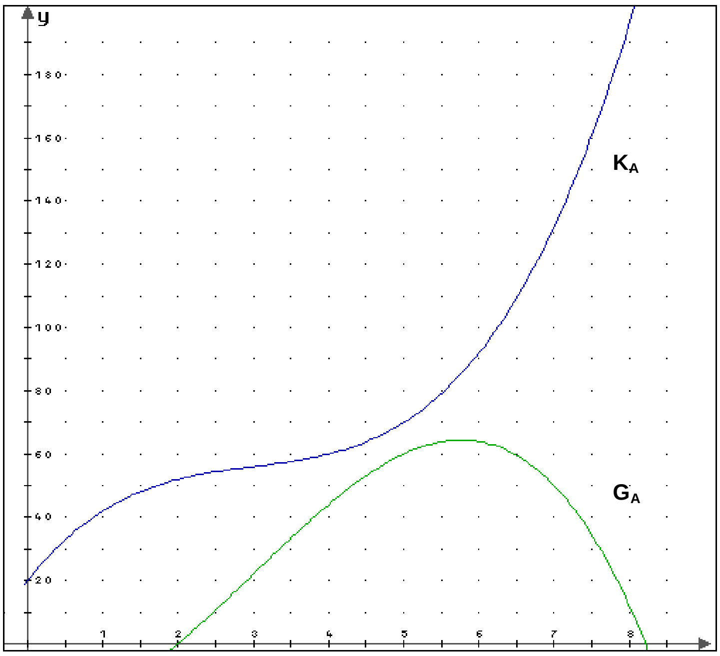
$$x^2 - 6x + \tfrac{4}{3} = 0$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{\tfrac{23}{3}}$$

$x_1 \approx 5{,}77 \qquad G_A''(5{,}57) < 0 \Rightarrow Max. \qquad G_A(5{,}77) \approx 64{,}46$

$x_2 \approx 0{,}23$ nicht relevant, da der Wert kleiner als die Gewinnschwelle ist.

Die gewinnmaximale Absatzmenge beträgt 5,77 ME und erbringt einen maximalen Gewinn von 64,46 GE.



I	II	III
10	20	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	c1) Die Kostenfunktion ist die Stammfunktion von K_B', die durch den Punkt $P(0\|30)$ verläuft. $K_B(x) = \int\left(\frac{1}{x+e} + \frac{1}{8}x^3\right)dx + c$ $K_B(x) = \ln(x+e) + \frac{1}{32}x^4 + c$ $K_B(0) = 30 \Leftrightarrow \ln(e) + c = 30 \Leftrightarrow c = 29$ $K_B(x) = \ln(x+e) + \frac{1}{32}x^4 + 29$ c2) Bed.: $K_B'(x) = k_B(x) \quad \Leftrightarrow \quad k_B'(x) = 0$ $K_B'(x) = \frac{1}{x+e} + \frac{1}{8}x^3$ $k_B(x) = \frac{K_B(x)}{x} = \frac{\ln(x+e) + \frac{1}{32}x^4 + 29}{x} = \frac{\ln(x+e)}{x} + \frac{1}{32}x^3 + \frac{29}{x}$ $k_B'(x) = \frac{\frac{1}{x+e}\cdot x - \ln(x+e)}{x^2} + \frac{3}{32}x^2 - \frac{29}{x^2}$ $= \frac{\frac{1}{x+e}}{x} - \frac{\ln(x+e)}{x^2} + \frac{3}{32}x^2 - \frac{29}{x^2}$ (1) $K_B'(x) = k_B(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x+e} + \frac{1}{8}x^3 = \frac{\ln(x+e)}{x} + \frac{1}{32}x^3 + \frac{29}{x}$ $\frac{1}{x+e} + \frac{1}{8}x^3 - \frac{\ln(x+e)}{x} - \frac{1}{32}x^3 - \frac{29}{x} = 0$ $\frac{1}{x+e} - \frac{\ln(x+e)}{x} + \frac{3}{32}x^3 - \frac{29}{x} = 0$ (2) $k_B'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{x+e}}{x} - \frac{\ln(x+e)}{x^2} + \frac{3}{32}x^2 - \frac{29}{x^2} = 0 \quad \vert \cdot(x)$ $\frac{1}{x+e} - \frac{\ln(x+e)}{x} + \frac{3}{32}x^3 - \frac{29}{x} = 0$ Die Bestimmungsgleichungen (1) und (2) stimmen überein; folglich werden sie auch von demselben x-Wert erfüllt. Damit ist gezeigt, dass sich die Graphen der Grenzkosten und der Stückkosten im Minimum der Stückkosten schneiden. c3) Bed.: $G_B(x) = 0$ $G_B(x) = E(x) - K_B(x)$ $G_B(x) = 26x - \ln(x+e) - \frac{1}{32}x^4 - 29$ $26x - \ln(x+e) - \frac{1}{32}x^4 - 29 = 0$ (keine ganzzahlige Lösung!)			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$G_B(1) \approx -4{,}34$ $\left.\right\} \Rightarrow x_0 = 1{,}1$ $G_B(2) \approx 20{,}95$ $Newton-Verfahren:$ $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ $f(x) = G_B(x) = 26x - \ln(x+e) - \frac{1}{32}x^4 - 29$ $f'(x) = G_B'(x) = 26 - \frac{1}{x+e} - \frac{1}{8}x^3$ $x_1 = 1{,}1 - \frac{f(1{,}1)}{f'(1{,}1)} \approx 1{,}1 - \frac{-1{,}7855537}{25{,}571727} \approx 1{,}1698253$ $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 1{,}1698253 - \frac{-0{,}0009886}{25{,}542693} \approx 1{,}169864$ $\Rightarrow GS(1{,}17/0)$	5	25	15
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Aufgabe 11: ln-Funktion, Untersuchung einer Funktionenschar TG, WG

Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktionenschar f_a:

$$f_a(x) = \frac{a + \ln x}{x} \quad , \quad a \in \mathbb{R}.$$

a) Untersuchen Sie die Funktionenschar f_a unter Berücksichtigung des Parameters a im Hinblick auf:

- den Definitionsbereich,
- das Verhalten am Rande des Definitionsbereichs,
- die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

b) Untersuchen Sie die Funktionenschar f_a auf Extrempunkte und zeigen Sie, dass f_a'' wie folgt lautet:

$$f_a''(x) = \frac{2a - 3 + 2 \cdot \ln x}{x^3} .$$

c) Bestimmen Sie die Wendepunkte der Funktionenschar f_a.

d) Ermitteln Sie die Gleichung derjenigen Kurve h, auf der alle Hochpunkte der Funktionenschar f_a liegen.

Für alle folgenden Teilaufgaben sei $a = 1$.

e) Skizzieren Sie den Graph der Funktion f_1.

f) Der Graph der Funktion f_1, sowie die Geraden $g(x) = 0$ und $x = 1$ schließen eine Fläche A ein.

f1) Zeigen Sie durch Integrieren, dass eine Stammfunktion zu f_1 wie folgt lautet:

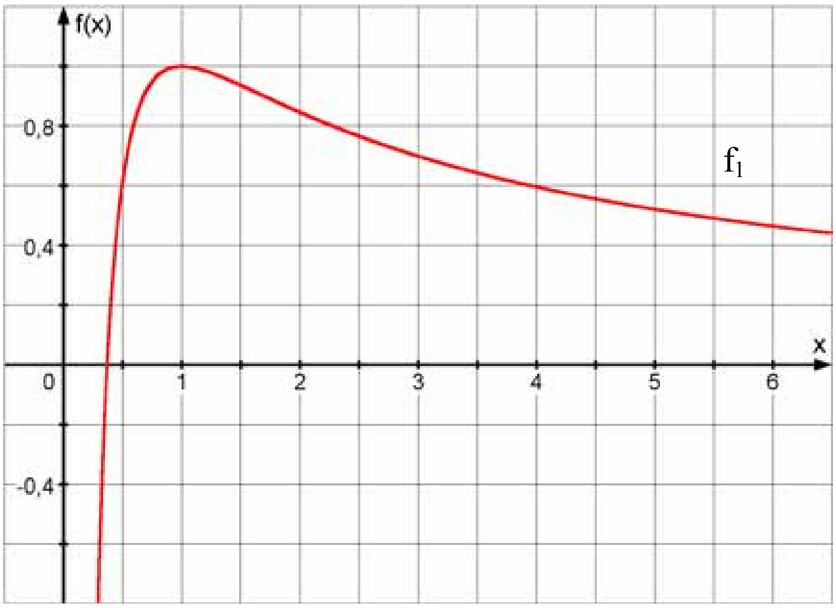
$$F_1(x) = \tfrac{1}{2} \cdot (1 + \ln x)^2 + c \; ; \quad c \in R .$$

f2) Berechen Sie den Inhalt der oben beschriebenen Fläche A.

f3) Untersuchen Sie, ob der Grenzwert der vom Graphen der Funktion f_1 und den beiden Koordinatenachsen im 4. Quadranten begrenzten, aber nicht eingeschlossenen Fläche B existiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$, weil $\ln x$ nur für $x > 0$ definiert ist. $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = 0$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0+h \\ h\to 0}} f_a(x) = -\infty$ (Grenzwert existiert nicht) Kein Sy, weil $x > 0$; $f_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = -a \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-a} \quad \Rightarrow Sx \quad (e^{-a} / 0)$	5	10	
b)	notw. Bed.: $f_a'(x) = 0$ hinr. Bed.: $f_a''(x_E) > 0 \Rightarrow$ Min. $f_a''(x_E) < 0 \Rightarrow$ Max. $f_a'(x) = \frac{-a+1-\ln x}{x^2}$ $f_a''(x) = \frac{2a-3+2\cdot\ln x}{x^3}$ $f_a'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -a+1-\ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = -a+1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-a+1}$ $f_a''(e^{-a+1}) = \frac{1}{(e^{-a+1})^3} < 0 \quad \Rightarrow \quad Max$ $f_a(e^{-a+1}) = \frac{1}{e^{-a+1}} \quad \Rightarrow \quad E_{Max}\left(e^{-a+1} / \frac{1}{e^{-a+1}}\right)$	5	15	
c)	notw. Bed.: $f_a''(x) = 0$ hinr. Bed.: $f_a'''(x_W) > 0 \Rightarrow W_{R/L}$ $f_a'''(x_W) < 0 \Rightarrow W_{L/R}$ $f_a''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a-3+2\cdot\ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = -a+\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-a+\frac{3}{2}}$ $\left[f_a'''(x) = \frac{-6a+11-6\cdot\ln x}{x^4} \right]$ $f_a'''(e^{-a+\frac{3}{2}}) = \frac{2}{(e^{-a+\frac{3}{2}})^4} > 0 \quad \Rightarrow$ WP mit R/L-Krümmung (oder verbale Erläuterung des Krümmungsverhaltens.)			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$f_a(e^{-a+\frac{3}{2}}) = \frac{3}{2e^{-a+\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad W_{RL}\left(e^{-a+\frac{3}{2}} / \frac{3}{2e^{-a+\frac{3}{2}}}\right)$	5	12	
d)	$E_{Max}\left(e^{-a+1} / \frac{1}{e^{-a+1}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-a+1}$ und $y = \frac{1}{e^{-a+1}} \quad \Rightarrow \quad h(x) = \frac{1}{x}$		8	
e)	Skizze für $a = 1$:  		10	
f)	f1) Nach der Substitutionsregel mit der Annahme $u = 1 + \ln x$ und $u' = \frac{1}{x}$ folgt unmittelbar, dass $F(u) = \frac{1}{2} \cdot u^2 + C$ lautet. $\Rightarrow \qquad F_1(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 + \ln x)^2 + C$ f2) Aus $Sx(e^{-1}/0)$ ergibt sich: $A = \int_{e^{-1}}^{1} f_1(x) \quad dx = \left[\frac{1}{2} \cdot (1 + \ln x)^2\right]_{e^{-1}}^{1} = \frac{1}{2}$. f3) Uneigentliches Integral mit der Grenze h $(h > 0)$ und $h \to 0$: $B(h) = \int_{e^{-1}}^{h} f_1(x)dx = \left[\frac{1}{2} \cdot (1 + \ln x)^2\right]_{e^{-1}}^{h} = \left[\frac{1}{2} \cdot (1 + \ln h)^2\right] - [0]$ $= \frac{1}{2} \cdot (1 + \ln h)^2$ $\Rightarrow \quad \lim_{h \to 0}\left[\frac{1}{2} \cdot (1 + \ln h)^2\right] = \infty \quad \Rightarrow$ Der Grenzwert existiert nicht.		15	15
	Insgesamt 100 BWE	15	70	15

Aufgabe 12: e-Funktion, Untersuchung einer Funktionenschar TG, WG

Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit

$$f_t(x) = tx \cdot e^{-x^2} \qquad \text{mit } t \in \mathbb{R}^* .$$

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und untersuchen Sie die Funktionenschar f_t auf mögliche Symmetrieeigenschaften.

b) Bestimmen Sie das Verhalten des Graphen von f_t an den Rändern des Definitionsbereiches, untersuchen Sie die Funktionenschar f_t auf Extrempunkte und zeigen Sie, dass f_t'' wie folgt lautet:

$$f_t''(x) = 2t \cdot (-3x + 2x^3) \cdot e^{-x^2} .$$

c) Ermitteln Sie zu f_t die Wendepunkte mit dem jeweiligen Krümmungsübergang.

Für alle weiteren Teilaufgaben sei nun $t = 4$.

d) Skizzieren Sie den Graph der Scharfunktion f_4 .

e) Der Graph der Funktion f_4 , die Abszisse und die Gerade $x = k$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $k > 0$ schließen im 1. Quadranten eine Fläche A(k) ein.

e1) Berechnen Sie den Inhalt der oben beschriebenen Fläche A(k) und zeigen Sie durch Integration, dass eine Stammfunktion von f_4 wie folgt lautet:

$$F_4(x) = -2e^{-x^2} + C \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R} .$$

e2) Untersuchen Sie, ob der Grenzwert von A(k) für $k \to \infty$ existiert.

f) Eine Gerade g schneidet den Graph der Funktion f_4 in allen Wendepunkten.

f1) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden *g*:

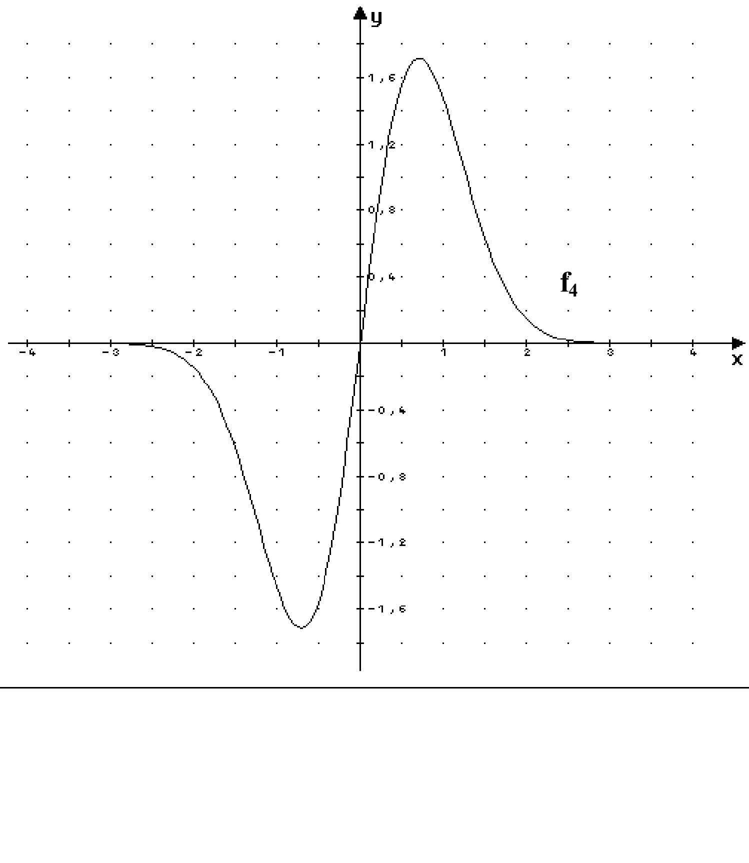
[Lösungshinweis: $g(x) = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{e^3}} \cdot x$]

f2) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche *B*, die der Graph von f_4 mit der Geraden g einschließt.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	$\mathbb{D}_{max} = \mathbb{R}$, weil sowohl der ganzrationale als auch der exponentielle Faktor für alle reellen Zahlen definiert ist. Sy: $x = 0 \quad \Rightarrow \quad Sy(0\|0)$ Sx: $f_t(x) = 0$ $tx \cdot e^{-x^2} = 0$ $t \cdot x = 0 \quad \vee \quad e^{-x^2} = 0$ (nicht erfüllbar, weil $e^{-x^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$) $x = 0 \quad \Rightarrow \ Sx\ (1\|0)$ Symmetrieeigenschaften: 1. G_f verläuft symmetrisch zur y-Achse $\Leftrightarrow f_t(x) = f_t(-x)$ 2. G_f verläuft symmetrisch zum Nullpunkt $\Leftrightarrow f_t(x) = -f_t(-x)$ 1. $f_t(-x) = t(-x) \cdot e^{-(-x)^2} = -tx \cdot e^{-x^2} \neq f_t(x)$ 2. $-f_t(-x) = -t(-x) \cdot e^{-(-x)^2} = tx \cdot e^{-x^2} = f_t(x)$ Folgerung: G_f verläuft symmetrisch zum Nullpunkt.	5	5	
b)	Die Ränder des Definitionsbereiches liegen im positiven und negativen Unendlichen: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} tx \cdot e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{tx}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{t}{2x \cdot e^{x^2}} = 0$ 1. und 2. Ableitung von f_t unter Anwendung der Produktregel: $f_t'(x) = t \cdot e^{-x^2} + tx \cdot (-2x \cdot e^{-x^2})$ $= t \cdot (1 - 2x^2) \cdot e^{-x^2}$ $f_t''(x) = t \cdot [-4x \cdot e^{-x^2} + (1 - 2x^2) \cdot (-2x \cdot e^{-x^2})]$ $= 2t \cdot (-3x + 2x^3) \cdot e^{-x^2}$ (q.e.d.) Extrempunkte: notw. Bed.: $f_t'(x) = 0$ $t \cdot (1 - 2x^2) \cdot e^{-x^2} = 0$ $e^{-x^2} = 0$ (nicht erfüllbar, weil $e^{-x^2} > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$) $1 - 2x^2 = 0$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$x_{E1} = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0{,}707$ $x_{E2} = -\sqrt{\frac{1}{2}} \approx -0{,}707$ hinr. Bed.: $f_t''(x_E) > 0 \Rightarrow x_E$ ist Minimalstelle $f_t''(x_E) < 0 \Rightarrow x_E$ ist Maximalstelle $f_t''(\sqrt{\frac{1}{2}}) = -2t\sqrt{\frac{2}{e}} \Rightarrow \begin{cases} Max. \quad in\, x = \sqrt{0{,}5} \\ Min. \quad in\, x = \sqrt{0{,}5} \end{cases} \; für \begin{matrix} t > 0 \\ t < 0 \end{matrix}$ $f_t''(-\sqrt{\frac{1}{2}}) = 2t\sqrt{\frac{2}{e}} \Rightarrow \begin{cases} Min. \quad in\, x = -\sqrt{0{,}5} \\ Max. \quad in\, x = -\sqrt{0{,}5} \end{cases} \; für \begin{matrix} t > 0 \\ t < 0 \end{matrix}$ $f_t(\sqrt{\frac{1}{2}}) = t \cdot \sqrt{\frac{1}{2e}} \Rightarrow \begin{cases} E_{MAX}(\sqrt{\frac{1}{2}} / t \cdot \sqrt{\frac{1}{2e}}) \\ E_{MIN}(\sqrt{\frac{1}{2}} / t \cdot \sqrt{\frac{1}{2e}}) \end{cases} \; für \begin{matrix} t > 0 \\ t < 0 \end{matrix}$ $f_t(-\sqrt{\frac{1}{2}}) = -t \cdot \sqrt{\frac{1}{2e}} \Rightarrow \begin{cases} E_{MIN}(-\sqrt{\frac{1}{2}} / -t \cdot \sqrt{\frac{1}{2e}}) \\ E_{MAX}(-\sqrt{\frac{1}{2}} / -t \cdot \sqrt{\frac{1}{2e}}) \end{cases} \; für \begin{matrix} t > 0 \\ t < 0 \end{matrix}$	5	15	5
c)	3. Ableitung von f_t unter Anwendung der Produktregel: $f_t''(x) = 2t \cdot (-3x + 2x^3) \cdot e^{-x^2}$ $f_t'''(x) = 2t \cdot [(-3 + 6x^2) \cdot e^{-x^2} + (-3x + 2x^3) \cdot (-2x \cdot e^{-x^2})]$ $= 2t \cdot (-3 + 12x^2 - 4x^4) \cdot e^{-x^2}$ Notw. Bed.: $f_t''(x) = 0$ $2t \cdot (-3x + 2x^3) \cdot e^{-x^2} = 0$ $e^{-x^2} = 0$ (nicht erfüllbar, weil $e^{-x^2} > 0 \;\forall\, x \in \mathbb{R}$.) $2x^3 - 3x = 0$ $x(2x^2 - 3) = 0$ $x_{W1} = 0$ $2x^2 - 3 = 0$ $x_{W2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1{,}225$ $x_{W3} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \approx -1{,}225$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	hinr. Bed.: $f_t'''(x_W) > 0 \Rightarrow W_{R/L}$ in x_W $f_t'''(x_W) < 0 \Rightarrow W_{L/R}$ in x_W $f_t'''(0) = -6t \Rightarrow \begin{cases} W_{L/R} & in\, x = 0 \\ W_{R/L} & in\, x = 0 \end{cases} \; f\ddot{u}r \; \begin{matrix} t > 0 \\ t < 0 \end{matrix}$ $f_t'''(\sqrt{\frac{3}{2}}) = 12t\sqrt{\frac{1}{e^3}} \Rightarrow \begin{cases} W_{R/L} & in\, x = \sqrt{1{,}5} \\ W_{L/R} & in\, x = \sqrt{1{,}5} \end{cases} \; f\ddot{u}r \; \begin{matrix} t > 0 \\ t < 0 \end{matrix}$ $f_t'''(-\sqrt{\frac{3}{2}}) = 12t\sqrt{\frac{1}{e^3}} \Rightarrow \begin{cases} W_{R/L} & in\, x = -\sqrt{1{,}5} \\ W_{L/R} & in\, x = -\sqrt{1{,}5} \end{cases} \; f\ddot{u}r \; \begin{matrix} t > 0 \\ t < 0 \end{matrix}$ $f_t(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} W_{L/R}(0/0) \\ W_{R/L}(0/0) \end{cases} \; f\ddot{u}r \; \begin{matrix} t > 0 \\ t < 0 \end{matrix}$ $f_t(\sqrt{\frac{3}{2}}) = t\sqrt{\frac{3}{2e^3}} \Rightarrow \begin{cases} W_{R/L}(\sqrt{\frac{3}{2}} / t \cdot \sqrt{\frac{3}{2e^3}}) \\ W_{L/R}(\sqrt{\frac{3}{2}} / t \cdot \sqrt{\frac{3}{2e^3}}) \end{cases} \; f\ddot{u}r \; \begin{matrix} t > 0 \\ t < 0 \end{matrix}$ $f_t(-\sqrt{\frac{3}{2}}) = -t\sqrt{\frac{3}{2e^3}} \Rightarrow \begin{cases} W_{R/L}(\sqrt{\frac{3}{2}} /-t \cdot \sqrt{\frac{3}{2e^3}}) \\ W_{L/R}(\sqrt{\frac{3}{2}} /-t \cdot \sqrt{\frac{3}{2e^3}}) \end{cases} \; f\ddot{u}r \; \begin{matrix} t > 0 \\ t < 0 \end{matrix}$	5	15	
d)			10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	e1) Durch lineare Substitution lässt sich die Stammfunktion herleiten: $\int k \cdot u'(\mathrm{x}) \cdot e^{u(x)} \mathrm{dx} = k \cdot e^{u(x)} + c$ $\int 4x \cdot e^{-x^2}\ \mathrm{dx} = \int -2(-2x)e^{-x^2}\,dx = -2 \cdot e^{-x^2} + c$ (q.e.d.) Da f_4 die Abszisse nur im Ursprung schneidet, ergibt sich für das Integral als Fläche: $A(k) = \int\limits_0^k 4x \cdot e^{-x^2}\,dx = \left[-2 \cdot e^{-x^2}\right]_0^k = -2 \cdot e^{-k^2} + 2 = 2(1 - e^{-k^2})$. e2) $\lim\limits_{k \to \infty} A(k) = \lim\limits_{k \to \infty} 2 \cdot (1 - e^{-k^2}) = 2 \Rightarrow$ Der Grenzwert für k $\to \infty$ existiert.	5	5	5
f)	f1) Da alle Graphen der Schar symmetrisch zum Nullpunkt verlaufen, verläuft auch der Graph von f_4 punktsymmetrisch. Hieraus lässt sich unmittelbar folgern, dass alle drei Wendepunkte auf einer Geraden liegen, die durch den Nullpunkt verläuft. Es gilt also: $g(x) = mx$ und $W_1(0\|0)$, $W_2\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \,\middle\|\, 4\sqrt{\frac{3}{2e^3}}\right)$, $W_3\left(-\sqrt{\frac{3}{2}} \,\middle\|\, -4\sqrt{\frac{3}{2e^3}}\right)$. $\Rightarrow m = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{e^3}} \Rightarrow \mathrm{g}(x) = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{e^3}} \cdot x$ (q.e.d.) f2) Aus der Skizze ist zu ersehen, dass die Gerade g und der Graph von f_4 sich nur in den Wendepunkten von f_4 schneiden. Hieraus und aus der Punktsymmetrie folgt für das Integral als Fläche: $B = 2\int\limits_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \left(4x \cdot e^{-x^2} - 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{e^3}}x\right)dx = 2\left[-2 \cdot e^{-x^2} - 2\sqrt{\frac{1}{e^3}}x^2\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}}$ $= 2\left[\left(-2 \cdot \sqrt{\frac{1}{e^3}} - 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{e^3}}\right) - (-2)\right]$ $= 2\left[-5 \cdot \sqrt{\frac{1}{e^3}} + 2\right] \approx 2 \cdot 0{,}884 \approx 1{,}77$ FE.		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 13: ln-Funktion, Untersuchung einer Funktionenschar — TG, WG

Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktionenschar f_t:

$$f_t(x) = t \cdot x \cdot (\ln x)^2 \qquad \text{mit } t \in \mathbb{R}^* .$$

a) Diskutieren Sie die Funktionenschar f_t unter Berücksichtigung des Parameters t im Hinblick auf:

- maximalen Defintionsbereich,
- Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen,
- Verhalten an den Rändern des Definitionsbereiches.

b) Untersuchen Sie die Funktionenschar f_t auf Extrempunkte und zeigen Sie, dass f_t'' wie folgt lautet:

$$f_t''(x) = 2t \cdot \frac{1+\ln x}{x} .$$

c) Berechnen Sie zu f_t die Wendepunkte mit dem jeweiligen Krümmungsübergang.

Für die weiteren Teilaufgaben sei nun $t = 1$.

d) Skizzieren Sie den Graph der Funktion f_1 . Wählen Sie auf beiden Achsen eine Längeneinheit von 4 cm.

e) Zeigen Sie durch geeignete Rechnungen, dass eine Stammfunktion von f_1 wie folgt lautet:

$$F_1(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \left[(\ln x)^2 + \left(\frac{1}{2} - \ln x \right) \right] + C \quad , \quad C \in \mathbb{R} .$$

f) Eine Gerade g schneidet den Graph der Funktion f_1 in dessen Wendepunkt und im Punkt $P_1(e|e)$.

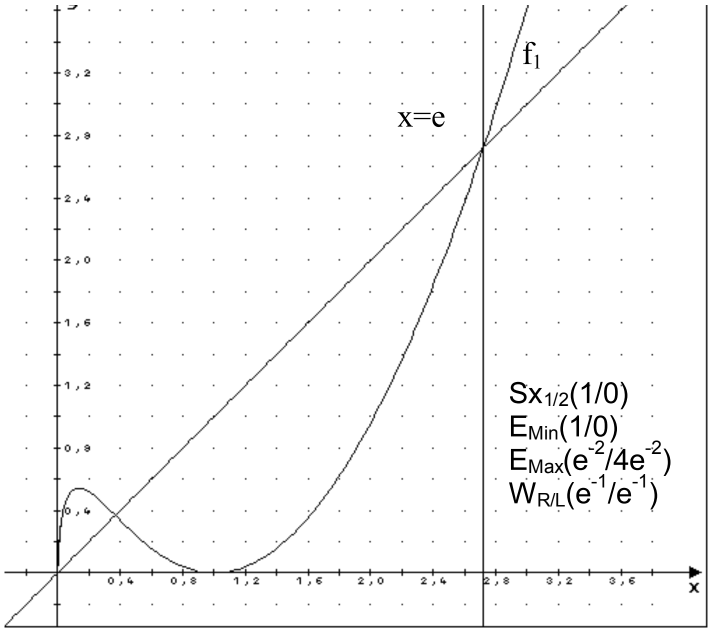
f1) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g.

f2) Die Parallele zur Ordinate durch den Punkt P_1 schneidet die Abszisse im Punkt P_2 . Berechnen Sie den Inhalt der Fläche des Dreiecks A, dessen Eckpunkte durch den Punkt $N(0|0)$ und die beiden Punkten P_1 und P_2 festgelegt sind.

f3) Zeigen Sie mit Hilfe eines uneigentlichen Integrals, dass der Graph von f_1 mit den Katheten des Dreiecks A eine „Fläche“ einschließt, deren Wert genau die Hälfte des Flächenmaßes des Dreiecks beträgt.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	$\mathbb{D}_{max} = \mathbb{R}^{+}$, weil der log. Faktor nur für positive reelle Zahlen definiert ist. Sy: $x = 0 \notin \mathbb{D}_{max}$ $\Rightarrow$ kein Sy Sx: $f_t(x) = 0$ $tx\,(\ln x)^2 = 0$ $tx = 0 \quad \vee \quad (\ln x)^2 = 0$ $x_1 = 0 \notin \mathbb{D}_{max}$; $x_{2/3} = 1 \Rightarrow Sx_{1/2}(1\|0)$ $\lim\limits_{x\to\infty} tx\,(\ln x)^2 = \begin{cases} +\infty & \text{für } t>0 \\ -\infty & t<0 \end{cases}$ $\lim\limits_{\substack{x\to h \\ h\to 0}} tx\,(\ln x)^2 = 0$ [Der ganzrationale Faktor strebt schneller gegen 0, als der logarithmische gegen ∞.]	5	10	
b)	notw. Bed.: $f_t'(x) = 0$ $f_t'(x) = t\,(\ln x)^2 + 2t\,(\ln x) = t \ln x\,(2 + \ln x)$ $t \ln x\,(2 + \ln x) = 0$ $t \ln x = 0 \quad \vee \quad 2 + \ln x = 0$ $x_{E1} = 1 \qquad \ln x = -2$ $x_{E2} = e^{-2}$ hinr. Bed.: $f_t''(x_E) > 0 \Rightarrow$ Min. $f_t''(x_E) < 0 \Rightarrow$ Max. $f_t''(x) = \frac{t}{x}(2 + \ln x) + \frac{t}{x}\ln x = 2t\frac{1 + \ln x}{x}$ $f_t''(1) = 2t \Rightarrow \begin{cases} Min. \ \ in\, x = 1 \ \ für\, t>0 \\ Max. \ \ in\, x = 1 \ \ für\, t<0 \end{cases}$ $f_t''(e^{-2}) = -2t\,e^2 \Rightarrow \begin{cases} Max. \ \ in\, x = -2 \ \ für\, t>0 \\ Min. \ \ in\, x = -2 \ \ für\, t<0 \end{cases}$ $f_t(1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_{MIN}(1/0) \ \ für\, t>0 \\ E_{MAX}(1/0) \ \ für\, t<0 \end{cases}$ $f_t(e^{-2}) = \frac{4t}{e^2} \Rightarrow \begin{cases} E_{MAX}(\frac{1}{e^2}/\frac{4t}{e^2}) & für \ \ t>0 \\ E_{MIN}(\frac{1}{e^2}/\frac{4t}{e^2}) & für \ \ t<0 \end{cases}$	5	15	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	Notw. Bed.: $f_t''(x) = 0$ $f_t''(x) = 2t \cdot \dfrac{1 + \ln x}{x}$ $1 + \ln x = 0$ $\ln x = -1$ $x_W = e^{-1}$ hinr. Bed.: $f_t'''(x_W) > 0 \Rightarrow W_{R/L}$ $f_t'''(x_W) < 0 \Rightarrow W_{L/R}$ $f_t'''(x) = 2t \cdot \dfrac{1 - (1 + \ln x)}{x^2} = -2t \cdot \dfrac{\ln x}{x^2}$ $f_t'''(e^{-1}) = 2t\,e^2 \Rightarrow \begin{cases} W_{R/L} & in\ x = e^{-1} \quad für\ t > 0 \\ W_{L/R} & in\ x = e^{-1} \quad für\ t < 0 \end{cases}$ [oder verbale Begründung des Krümmungsübergangs!] $f_t(e^{-1}) = \dfrac{t}{e} \Rightarrow \begin{cases} W_{R/L}(\frac{1}{e} / \frac{t}{e}) & für \quad t > 0 \\ W_{L/R}(\frac{1}{e} / \frac{t}{e}) & für \quad t < 0 \end{cases}$		10	5
d)	Skizze für $t = 1$:  		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Es ist zu zeigen, dass gilt: $F_1'(x) = f_1(x)$. $F_1'(x) = x\,[(\ln x)^2 + (\frac{1}{2} - \ln x)] + \frac{1}{2}x^2\,[\frac{2}{x}\ \ln x - \frac{1}{x})$ $= x\,(\ln x)^2 + \frac{1}{2}x - x\ln x + x\ln x - \frac{1}{2}x$ $= x\,(\ln x)^2 = f_1(x)$ (q.e.d.)		5	
f)	f1) $W_{R/L}(e^{-1}\|e^{-1})$, $P_1(e\|e)$ und $g(x) = mx + b$. W: $e^{-1} = e^{-1}\,m + b$ $\underline{P_1:\ v\ e = e\,m + b}$ $b = 0$ $m = 1$ $\Rightarrow g(x) = x$. f2) Der Punkt P_2 lautet: $P_2(e\|0)$. NP_1P_2 ist ein rechtwinkliges Dreieck, für dessen Flächenberechnung u.a. gilt: $A = \frac{1}{2}\cdot e\cdot e = \frac{1}{2}e^2$ FE. f3) Beh.: $\frac{1}{2}\cdot A = \lim\limits_{k\to 0}\int_k^e x\,(\ln x)^2\ dx$ $\int_k^e x\,(\ln x)^2\ dx = [\frac{1}{2}x^2\,[(\ln x)^2 + (\frac{1}{2} - \ln x)]\,]_k^e$ $= [\frac{1}{2}e^2\,(1 - \frac{1}{2})\,] - [\frac{1}{2}k^2\,[(\ln k)^2 + (\frac{1}{2} - \ln k)]\ ]$ $= -\frac{1}{4}e^2 - (\frac{1}{2}k^2\,[(\ln k)^2 + (\frac{1}{2} - \ln k)]\,)$ $\Rightarrow \lim\limits_{k\to 0}\int_k^e x\,(\ln x)^2\ dx = \lim\limits_{k\to 0}\ [-\frac{1}{4}e^2 - (\frac{1}{2}k^2\,[(\ln k)^2 + (\frac{1}{2} - \ln k)]\,)\,]$ $= -\frac{1}{4}e^2 - 0 = -\frac{1}{4}e^2 = \frac{1}{2}\cdot A$ (q.e.d.)		20	10
	Insgesamt 100 BWE	10	70	20

Aufgabe 14: Diskussion einer Kurvenschar — TG, WG

In dieser Aufgabe geht es nicht um einen Anwendungs- oder Modellierungsaspekt sondern um innermathematische Zusammenhänge. Deshalb nimmt die Verbalisierung von Lösungsansätzen, Zusammenhängen und Interpretationen einen großen Raum ein.

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Die Schülerinnen und Schüler sind sicher im Umgang mit den Untersuchungsmethoden der Analysis. Dazu gehören auch Untersuchungen mit Hilfe von Grenzwerten. Sie können mit Kurvenscharen umgehen. Sie kennen nicht nur rezeptartiges Abarbeiten von Methoden, sondern können auch begründen, warum ein Ansatz gewählt wurde und zum Ziel führt. Sie kennen die Integrationsmethode $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln(u(x)) + c$.

Aufgabenstellung

Gegeben ist die Funktionenschar mit

$$f(x) = \frac{ax - a^2}{4x^2 - 8ax} \qquad \text{mit } a > 0$$

sowie ihrer dritten Ableitung

$$f'''(x) = \frac{-384ax^4 + 1664a^2x^3 - 4992a^3x^3 + 6912a^4x - 3584a^5}{(4x^2 - 8ax)^4}.$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und untersuchen Sie den Kurvenverlauf in der jeweiligen Umgebung der Ausnahmestellen. Die Rechenansätze sind ausführlich zu begründen und die Ergebnisse zu interpretieren.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Grenzkurve g und untersuchen Sie das Verhalten des Graphen von f zum Graphen von g im Endlichen und Unendlichen. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

c) Zeigen Sie, dass die Graphen der Funktionenschar keine Extrema aufweisen. Begründen Sie Ihren Ansatz.

d) Weisen Sie nach, dass die notwendige Bedingung für alle Wendepunkte der Schar durch $x = a$ erfüllt wird (dieser Wert darf benutzt werden). Charakterisieren Sie den Kurvenverlauf im Wendepunkt mit Hilfe der gegebenen 3. Ableitung. Folgern Sie schrittweise aus den Ableitungen auf den Verlauf der Graphen von f.

Für die Aufgabenteile e) und f) arbeiten Sie bitte mit der konkreten Funktion, die zu $a = 1$ gehört.

e) Fertigen Sie eine Skizze dieses Graphen an.

f) Prüfen Sie, ob der Fläche im 3. Quadranten, die von der Asymptote, dem Graphen von f, der Abszisse und der Geraden $x = -1$ begrenzt wird, ein endlicher Flächeninhalt zugeordnet werden kann.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Lösungsskizze</td><td colspan="3">Zuordnung,
Bewertung</td></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>Da die Funktion nicht definiert ist für x-Werte, für die der Nenner 0 wird, da die Division durch 0 nicht definiert ist, werden diese x Werte bestimmt:

$N(x) = 0$
$4x^2 - 8ax = 0$
$4x(x - 2a) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 2a \qquad \mathbb{D}_x = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 0, x \neq 2a\}$

$\displaystyle \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{-a^2}{\to 0} = \mid \infty \mid \quad \Rightarrow$ senkrechte Asymptote

$\displaystyle \lim_{x\to 2a} f(x) = \frac{a^2}{\to 0} = \mid \infty \mid \quad \Rightarrow$ senkrechte Asymptote

Feinuntersuchungen:
$x_1 = 0$:
$\displaystyle \lim_{\varepsilon\to 0} f(0 \pm \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{a(\pm\varepsilon) - a^2}{4(\pm\varepsilon)(\pm\varepsilon - 2a)} = \frac{-a^2}{\pm 0 \cdot (-2a)} = \frac{-a^2}{\to \mp 0} = \pm\infty$,

da $a > 0$ nach Voraussetzung.

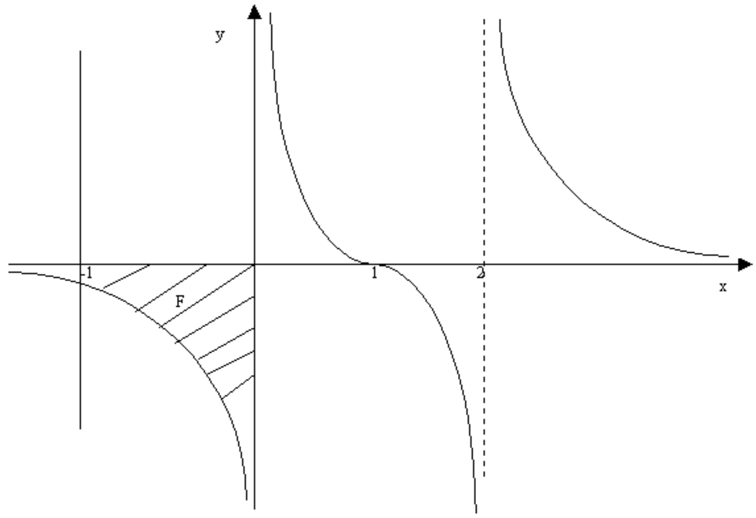
Nähern sich die x-Werte von rechts (links) an $x_1 = 0$, so streben die Funktionswerte gegen $+\infty$ ($-\infty$).

$x_2 = 2a$:
$\displaystyle \lim_{\varepsilon\to 0} f(2a \pm \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{a(2a \pm \varepsilon) - a^2}{4(2a \pm \varepsilon)(2a \pm \varepsilon - 2a)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{a(2a \pm \varepsilon) - a^2}{4(2a \pm \varepsilon)(\pm\varepsilon)}$
$\displaystyle = \frac{2a^2 - a^2}{4 \cdot 2a(\pm 0)} = \frac{a^2}{\to \pm 0} = \pm\infty$

Interpretation s.o.</td><td>5</td><td>14</td><td>5</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Umformen des Funktionsterms, Zähler : Nenner $\Rightarrow$ $g(x) = 0$
$a(x) = f(x)$
Schnittpunkte (entsprechen hier den Nullstellen)
$ax - a^2 = 0 \quad \Rightarrow x_{01} = a$ Schnittpunkt $(a\vert 0)$

Verhalten im Unendlichen
Wie entwickeln sich $a(x) = f(x)$ für $x \to \pm\infty$?
$\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{ax - a^2}{4x^2 - 8ax} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{a}{x} - \frac{a^2}{x^2}}{4 - \frac{8a}{x}} = \frac{\pm 0}{4 \mp 0} = \frac{\pm 0}{4} = \pm 0$
für $x \to +\infty \quad \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow$ Annäherung von oben an $g(x)$
für $x \to -\infty \quad \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow$ Annäherung von unten an $g(x)$</td><td>2</td><td>10</td><td>5</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	$f'(x)=\frac{a(4x^2-8ax)-(8x-8a)(ax-a^2)}{(4x^2-8ax)^2}$ $=\frac{4ax^2-8a^2x-8ax^2+8a^2x+8a^2x-8a^3}{(4x^2-8ax)^2}=\frac{-4ax^2+8a^2x-8a^3}{(4x^2-8ax)^2}$ An den Stellen der Extrema hat der Graph waagerechte Tangenten, also die Steigung 0. Also hat $f'(x)$ hier den Funktionswert 0. Gesucht werden also die x-Werte, für die gilt: $f'(x)=0$ $-4ax^2+8a^2x-8a^3=0$ $x^2-2ax+2a^2=0$ $x_{11/12}=a\pm\sqrt{a^2-2a^2}$ $=a\pm\sqrt{-a^2}\quad\notin\mathbb{R}$ keine Nullstellen von $f'(x)$ ⇒ keine Extrema von f.	2	7	
d)	$f''(x)=\frac{(-8ax+8a^2)(4x^2-8ax)^2-2(4x^2-8ax)(8x-8a)(-4ax^2+8a^2x-8a^3)}{(4x^2-8ax)^4}$ notwendige Bedingung für einen Wendepunkt $f''(x_W)=0$ Probe: $f''(a)=\frac{(-8a^2+8a^2)(4a^2-8a^2)-2(8a-8a)(-4a^3+8a^3-8a^3)}{(4a^2-8a^2)^3}$ $=\frac{0\cdot(-4a^2)-2\cdot 0\cdot(-4a^3)}{(-4a^2)^3}=0$ Bedingung erfüllt. $f(a)=0$ (siehe b)) Wendepunkte $(a \mid 0)$ Charakterisierung: $f'''(a)$ = einsetzen = $\frac{-384a^5}{(-4a^2)^4}<0$ mit $a>0$ nach Vor. ⇒ $f''(x)$ geht fallend durch seine Nullstelle $x_{21}=a$. ⇒ $f''(x)$ hat links von x_{21} positive, rechts von x_{21} negative Funktionswerte ⇒ $f'(x)$ hat links von x_{21} positive, rechts von x_{21} negative Steigungswerte ⇒ $f'(x)$ hat bei $x_{21}=a$ ein Maximum ⇒ die Steigungswerte von $f(x)$ nehmen links von x_{21} zu und rechts von x_{21} ab ⇒ Links-Rechts-Übergang In steigendem/fallendem Kurvenverlauf? $f'(a)=\frac{-4a^3+8a^3-8a^3}{(4a^2-8a^2)^2}=\frac{-4a^3}{(4a^2-8a^2)^2}<0$ mit $a>0$ nach Voraussetzung ⇒ in fallendem Kurvenverlauf.	8	12	4

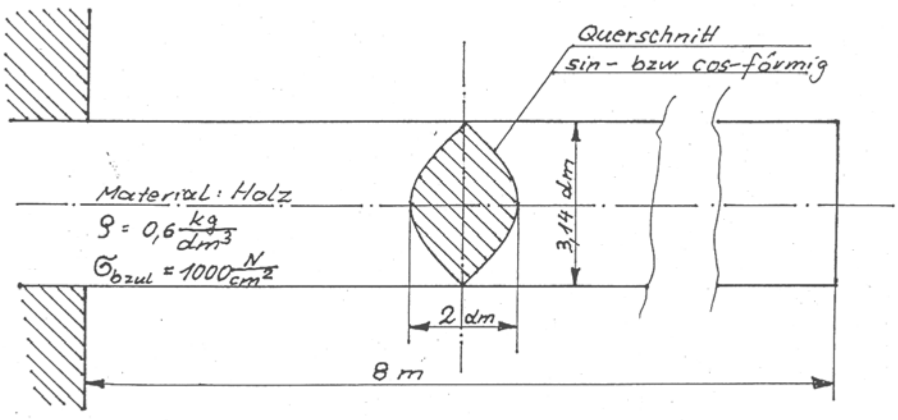
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	 		5	
f)	An der rechten Grenze der Fläche ist die Funktion nicht definiert, der Flächeninhalt muss mit einem Grenzwertprozess ermittelt werden. Rechte Grenze sei ε mit $\varepsilon \neq 0$ $F(\varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{-1} \frac{x-1}{4x^2-8x}dx = \frac{1}{8}\int_{-\varepsilon}^{-1} \frac{8x-8}{4x^2-8x}dx = \frac{1}{8}\left[\ln(4x^2-8x)\right]_{-\varepsilon}^{-1} =$ $= \frac{1}{8}(\ln 12 - \ln(4\varepsilon^2 + 8\varepsilon))$ $F = \lim_{\varepsilon \to 0} F(\varepsilon) = \frac{1}{8}(\ln 12 - (-\infty)) = +\infty \quad \Rightarrow$ kein endlicher Wert zuordbar.	4	8	9
	Insgesamt 100 BWE	21	56	23

Aufgabe 15: Holzträger TG

Die Bearbeitung der Aufgabe erfordert Grundkenntnisse in der Festigkeitslehre und eine sichere Orientierung im Anschauungsraum. Der mathematische Schwerpunkt liegt in der Integralrechnung. Im Verlauf der Aufgabe müssen geeignete algebraische und numerische Integrationsverfahren ausgewählt und angewendet werden. Zur Herleitung der Integrationsformel in Aufgabenteil b.1 ist darüber hinaus ein fundiertes Verständnis des Integralbegriffes erforderlich.

Aufgabenstellung

Ein sinus- bzw. kosinusförmiger Träger aus Holz ist waagerecht einseitig eingespannt (siehe Skizze).



Die Dichte beträgt $\rho = 0{,}6\ \text{kg}/\text{dm}^3$. Die zulässige Biegespannung beträgt $1000\ \text{N}/\text{cm}^2$.

a) Bestimmen Sie die durch das Eigengewicht des Trägers auftretende Biegespannung und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der zulässigen Biegespannung.

b) Der Träger soll gestrichen werden.

b.1 Die Bogenlänge eines Funktionsgraphen kann nach der Formel

$$l_B = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

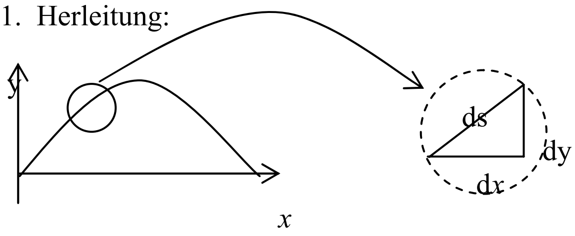
berechnet werden. Leiten Sie diese Formel her.

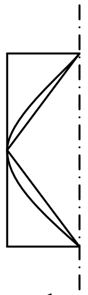
b.2 Bestimmen Sie die Bogenlänge des Trägerquerschnitts durch numerische Integration. Dabei ist $n = 6$ ausreichend.

b.3 Berechnen Sie die Oberfläche des Trägers.

c) Zeigen Sie durch eine grobe Abschätzung, dass ihre Ergebnisse in einem realistischen Bereich liegen.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Drehmoment: $A = 2\int_2^{\pi} \sin(x)\,dx = 2\cdot[-\cos(x)]_2^{\pi} = 4dm^2$ $m = A\cdot l\cdot\rho = 4dm^2\cdot 80dm\cdot 0{,}6\frac{kg}{dm^3} = 192kg$ $F = m\cdot g = 192kg\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} = 1883{,}5N$ $M = F\cdot\frac{l}{2} = 1883{,}5N\cdot 4m = 5734Nm$ Widerstandsmoment: $I = 2\cdot 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2\cdot\cos y\,dy = 4(y^2\cdot\sin y - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2y\cdot\sin y\,dy) =$ $I = \left[4(y^2\cdot\sin y + 2y\cdot\cos y - 2\sin y\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1{,}868dm^4$ $W = \frac{I}{e} = \frac{I}{\frac{\pi}{2}dm} = 1{,}19dm^3$ $M_b = \sigma\cdot W \Rightarrow \sigma = \frac{M_b}{W} = \frac{75340Ndm}{1{,}19dm^3} = 63311\frac{N}{dm^2} = 633\frac{N}{cm^2} < \sigma_{zul}$	10	20	
b)	1. Herleitung:  $ds = \lim_{s\to 0}\Delta s \qquad l_B = \sum_a^b ds$ $l_B = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$ 2. z.B. Numerische Integration nach Simpson: $l_B = \frac{b}{3}[y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4) + 4(y_1 + y_3 + y_5)]$ $y_0 = y_n = \sqrt{2}$ $y_2 = y_4 = \sqrt{1 + (\cos\frac{\pi}{3})^2} = 1{,}19$			30

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$y_1 = y_5 = \sqrt{1+(\cos\frac{\pi}{6})^2} = 1{,}32$ $y_3 = \sqrt{1} = 1$, $\frac{b}{3} = \frac{\pi}{6\cdot 3}$ $l_B = 3{,}866$ (dm) 3. Oberfläche $A = 2\cdot l_B \cdot l_{Tr} = 7{,}73\cdot 80 = 6{,}19\ (dm^2)$	2	15	
c)	Abschätzung:  ق > () > ◊ Volumen / Querschnittsfläche: $A_{\text{ق}} = 2\cdot\pi = 6{,}28\text{dm}^2 > 4\text{dm}^2$ $A_{\Diamond} = 0{,}5\cdot A_{\text{ق}} = 3{,}14\text{dm}^2 < 4\text{dm}^2$ Widerstandsmoment: $W_{\text{ق}} = \frac{bh^2}{3} = \frac{1}{3}\pi^2\text{dm}^3 = 3{,}3\text{dm}^3 > 1{,}19\text{dm}^3$ $W_{\Diamond} = \frac{bh^2}{24}\text{dm}^3 = \frac{1}{12}\pi^2\text{dm}^3 = 0{,}8\text{dm}^3 < 1{,}19\text{dm}^3$ Oberfläche / Bogenlänge: $l_{\text{ق}} = (2+\pi)\text{dm} = 5{,}14\text{dm} > 3{,}866\text{dm}$ $l_{\Diamond} = 2\cdot\sqrt{1+(\frac{\pi}{2})^2}\ \text{dm} = 3{,}7\text{dm} < 3{,}866\text{dm}$ Die errechneten Werte liegen also in einem realistischen Bereich.	15	8	
	Insgesamt 100 BWE	27	43	30

4.2.2 Analytische Geometrie / Lineare Algebra

Aufgabe 1: Geraden und Ebenen **Gy, GS, TG, WG**

Es werden eine Geraden- und eine Ebenenschar untersucht. Die Geraden liegen alle in einer zu bestimmenden Ebene. Die Ebenenschar hat eine besondere Lage zur Geraden h. Es werden Schnittpunkte und ein Winkel berechnet.

Aufgabenstellung

In einem kartesischen Koordinatensystem sind eine einzelne Gerade

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R},$$

eine Schar von Geraden $\mathrm{g_c} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$, $c, s \in \mathbb{R}$,

und eine Schar von Ebenen in Koordinatenform $\boldsymbol{E}_a :\ (3+a) \cdot x_1 + 2x_2 + ax_3 = 14$, $a \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Geraden g_c alle in einer Ebene liegen.
Bestimmen Sie diese Ebene und geben Sie sie in Parameterform und in Koordinatenform an.

b) Zeigen Sie, dass alle Ebenen $\boldsymbol{E_a}$ parallel zu h sind. Begründen Sie dazu zunächst Ihren Ansatz.

c) Bestimmen Sie allgemein in Abhängigkeit von a die Schnittpunkte von $\boldsymbol{E}_\mathrm{a}$ mit den drei Koordinatenachsen.

d) Zeigen Sie:
„Die Ebenen $\boldsymbol{E}_\mathrm{a}$ schneiden sich alle in einer einzigen Gerade k.“
Geben Sie k in Parameterform an.

e) Zeigen Sie:
„Es gibt genau ein c, so dass die Gerade g_c die Gerade h schneidet.“

h) Berechnen Sie den Schnittpunkt dieser Geraden g_c mit h und bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig und damit als Richtungsvektoren in der Parameterdarstellung einer Ebene geeignet. Jeder Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\c\end{pmatrix}$ ist als Linearkombination von $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ darstellbar: $$(1-c)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\c\end{pmatrix}.$$ Damit liegen alle g_c in der Ebene $\boldsymbol{E}: \vec{x}=\begin{pmatrix}10\\3\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ r,s\in\mathbb{R}$. Offenbar ist $x_2 = 3$ und x_1, x_3 sind beliebig wählbar. Damit ergibt sich die Koordinatenform $x_2 = 3$.		20	
b)	Wenn nachgewiesen werden kann, dass die Gerade h vollständig in einer Ebene $\boldsymbol{E}_a$ liegt oder aber keinen Punkt mit den Ebenen gemeinsam hat, ist alles bewiesen, denn dadurch ist der dritte mögliche Fall ausgeschlossen. Einsetzen eines Geradenpunktes (in allgemeiner Form) in die Ebenengleichung ergibt: $$(3+a)(5-2r)+2(9+3r)+a(5+2r)=14 \Leftrightarrow 10a+33=14.$$ Die Gleichung ist unabhängig von r für $a=-\frac{19}{10}$ lösbar; d.h. h ist in der Ebene $\boldsymbol{E}_{-\frac{19}{10}}$. Für alle anderen Werte von a haben h und $\boldsymbol{E}_a$ keinen Punkt gemeinsam.		15	5
c)	Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen haben jeweils in zwei Koordinaten den Wert 0. $x_1 = 0 \quad x_2 = 0$: $(0\,\vert\,0\,\vert\,\frac{14}{a})$ $\quad a \neq 0$, kein Schnittpunkt für $a = 0$ $x_1 = 0 \quad x_3 = 0$: $(0\,\vert\,7\,\vert\,0)$ $x_2 = 0 \quad x_3 = 0$: $\left(\frac{14}{3+a}\,\vert\,0\,\vert\,0\right)$ $\quad a \neq -3$, kein Schnittpunkt für $a = -3$	15	5	
d)	Die Ebenen $\boldsymbol{E}_a$ und $\boldsymbol{E}_b$ sind durch die Gleichungen $$(3+a)x_1+2x_2+ax_3=14 \text{ und } (3+b)x_1+2x_2+bx_3=14$$ gegeben. Nach Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten kann sofort eine allgemeine Lösung $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t\\\frac{14+3t}{2}\\t\end{pmatrix}$ berechnet werden.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Daraus ist eine Parameterdarstellung der gesuchten Geraden ablesbar: $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$ Alternative: Alle Ebenen sind parallel zu h und enthalten den Punkt $(0 \mid 7 \mid 0)$. Die gesuchte Gerade hat also die Richtung von h und z.B. den Stützpunkt $(0 \mid 7 \mid 0)$.		5	10
e)	Es ist nachzuweisen, dass g_c und h nur für einen Wert von c einen Schnittpunkt haben können. $\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ Aus der zweiten Gleichung folgt $r = -2$ und somit aus der ersten $s = -1$. Damit lautet die letzte Gleichung $5 - 4 = -c$. Ein Schnittpunkt existiert also nur für $c = -1$.		15	
f)	Der Schnittpunkt ist $\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ Der Winkel ergibt sich mit Hilfe des Skalarproduktes der Richtungsvektoren. $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -4 = \sqrt{17}\sqrt{2} \cdot \cos\varphi$, also $\cos \varphi = \frac{-4}{\sqrt{34}}$ und $\varphi \approx 133^0$ bzw. $\varphi \approx 47^0$.	5	5	
	Insgesamt 100 BWE	20	65	15

Aufgabe 2: Parameter auf verschiedenen Ebenen Gy, GS, TG, WG

Aufgabenstellung

Gegeben sind die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$,

die Ebenenschar $\boldsymbol{E}_t$ mit $(t + 1)\, x + y + (t - 1)\, z + t + 3 = 0$,

der Vektor $\vec{a}_t = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ 2+t \end{pmatrix}$ und die Punkte $P(-2 \mid 0 \mid 1)$ und $Q_t(1-2t \mid -2t \mid 4+2t)$ mit $k, t \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{a}_t$ und der Richtungsvektor der Geraden g für jedes t linear unabhängig sind.

b) Zeigen Sie, dass g in allen Ebenen der Schar liegt.

c) Welche Bedingung müssen die Parameter von zwei Ebenen dieser Schar erfüllen, damit diese Ebenen senkrecht zueinander stehen? Geben Sie ein Beispiel und die zugehörigen Ebenengleichungen an.

d) Welche Ebenen der oben genannten Schar haben vom Nullpunkt den Abstand $\sqrt{3}$?

e) Die Punkte P, Q_t und Q_{t+1} bilden ein Dreieck. Zeigen Sie, dass die Länge *einer* Dreiecksseite unabhängig von t ist und geben Sie deren Wert an. Berechnen Sie t so, dass die beiden anderen Seiten gleich lang sind. Geben Sie die Länge der beiden Seiten an.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	1. Die schnelle Lösung: Die beiden Vektoren sind linear unabhängig, da die beiden ersten Komponeten des Vektors $\vec{a}_t$ (unabhängig von t) identisch sind, dies aber beim Richtungsvektor der Geraden nicht der Fall ist. 2. Die rechnerische Lösung: Wenn $\vec{a}_t$ und der Richtungsvektor von *g* linear unabhängig sind, dann darf die Vektorgleichung $r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ 2+t \end{pmatrix} = \vec{0}$, $r, s \in \mathbb{R}$, nur trivial lösbar sein. Aus der Vektorgleichung erhält man das folgende lineare Gleichungssystem: (1) $r + s(1-t) = 0$ (2) $-2r + s(1-t) = 0$ (3) $-r + s(2+t) = 0.$ Formt man (3) zu (3') $r = s(2+t)$ um und setzt (3') in (1) und in (2) ein, so erhält man aus beiden Gleichungen $s = 0$. Setzt man diesen Wert für s in die drei Gleichungen ein, so folgt auch, dass $r = 0$ ist, was zu zeigen war.	15		
b)	*g* liegt in allen Ebenen der Schar, wenn die Komponenten von *g* die Ebenengleichung erfüllen. Setzt man in die Ebenengleichung für x den Wert k, für y den Term $-4-2k$ und für z den Term $-1-k$ ein, so erhält man den Term $(t+1)k + (-4-2k) + (t-1)(-1-k) + t + 3$. Elementare Umformungen liefern für diesen Term den Wert 0.	10		
c)	Wenn zwei Ebenen dieser Schar senkrecht aufeinander stehen sollen, dann muss das Skalarprodukt der Normalenvektoren dieser Ebenen den Wert 0 haben. Der Normalenvektor der einen Ebene sei $\vec{n}_{t_1} = \begin{pmatrix} t_1+1 \\ 1 \\ t_1-1 \end{pmatrix}$, der der anderen Ebene sei $\vec{n}_{t_2} = \begin{pmatrix} t_2+1 \\ 1 \\ t_2-1 \end{pmatrix}$. Bildet man das Skalarprodukt der beiden Vektoren, so folgt: $(t_1 + 1)(t_2 + 1) + 1 + (t_1 - 1)(t_2 - 1)$. Elementare Umformungen liefern die Bedingung $2t_1t_2 + 3 = 0$. Für $t_1 = 3$ folgt $t_2 = -0{,}5$. Die Ebenengleichungen lauten dann: (1) $4x + y + 2z + 6 = 0$ und (2) $0{,}5x + y - 1{,}5z + 2{,}5 = 0$.		25	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
d)	Um die Ebenen zu bestimmen, die vom Nullpunkt den Abstand $\sqrt{3}$ haben, formt man die gegebene Ebenengleichung für t_0 zunächst um. Man erhält mit $\sqrt{(t_0+1)^2+1+(t_0-1)^2} = \lvert \vec{n}_{t_0} \rvert$ die Darstellung $\frac{1}{\sqrt{2t_0^2+3}} \cdot \begin{pmatrix} t_0+1 \\ 1 \\ t_0-1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \frac{-3-t_0}{\sqrt{2t_0^2+3}}$. Um die Ebenen zu erhalten, die vom Nullpunkt den gegebenen Abstand haben, sucht man die Lösung der Gleichung $\frac{\lvert 3+t_0 \rvert}{\sqrt{2t_0^2+3}} = \sqrt{3}$. Quadriert man diese Gleichung und formt nach t_0^2 um, so folgt: $6t_0 = 5t_0^2$. Daraus folgt, dass zwei Ebenen den gegebenen Abstand vom Nullpunkt haben, und zwar mit $t_{0_1} = 0$ und $t_{0_2} = \frac{6}{5}$. Setzt man die beiden Werte in die Gleichung ein, so kann man zeigen, dass beide Werte die Gleichung erfüllen.		20	5
e)	Der Punkt Q_{t+1} hat die Koordinaten $(-1-2t \mid -2t-2 \mid 6+2t)$. Um die Längen der Dreiecksseiten zu bestimmen, bestimmt man die entsprechenden Vektoren $\overrightarrow{Q_t Q_{t+1}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PQ_t} = \begin{pmatrix} 3-2t \\ -2t \\ 3+2t \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PQ_{t+1}} = \begin{pmatrix} 1-2t \\ -2-2t \\ 5+2t \end{pmatrix}$. Da der Vektor von Q_t nach Q_{t+1} unabhängig von t ist, ist auch dessen Länge unabhängig von t. Sie beträgt $\sqrt{12}$. Desweiteren folgt: $\lvert \overline{PQ_t} \rvert = \sqrt{18+12t^2}$; $\lvert \overline{PQ_{t+1}} \rvert = \sqrt{30+24t+12t^2}$. Wenn die beiden Seiten gleich lang sein sollen, dann muss gelten: $18 + 12t^2 = 30 + 24t + 12t^2$. Elementare Umformungen liefern: $t = -0{,}5$. Setzt man diesen Wert ein, so folgt: $\lvert \overline{PQ_t} \rvert = \lvert \overline{PQ_{t+1}} \rvert = \sqrt{21}$.		5	20
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Aufgabe 3: Ortskurve der Schnittpunkte — Gy, GS

Diese Aufgabe basiert auf der Abituraufgabe Analytische Geometrie V des Abiturjahrgangs 1997 in Bayern.

Aufgabenstellung

Gegeben sind 2 Ebenenscharen $\boldsymbol{E}_t$: $2x_1 - tx_2 + 4x_3 = 0$ und

$\boldsymbol{H}_t$: $x_2 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie den Wert von t, für den der Punkt $Q\,(-3{,}2 \mid -4 \mid 5{,}6)$ in der Ebene $\boldsymbol{E}_t$ liegt.

Zeigen Sie, dass sich alle Ebenen $\boldsymbol{E}_t$ in einer Geraden s schneiden. Geben Sie eine Parametergleichung für s an.

b) Bestimmen Sie den Wert von t, für den die Ebenen $\boldsymbol{E}_t$ und $\boldsymbol{H}_t$ senkrecht zueinander liegen.

Beschreiben Sie, welche besondere Lage die Ebenen $\boldsymbol{H}_t$ im Koordinatensystem haben.

c) Berechnen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden g_t von $\boldsymbol{E}_t$ und $\boldsymbol{H}_t$.

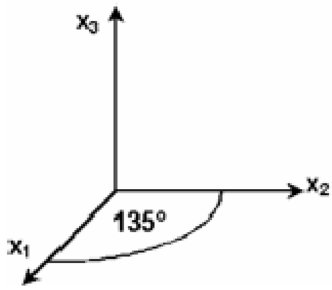
$$[\text{mögliches Ergebnis: } g_t:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}\ ]$$

Bestimmen Sie den Winkel, den die Gerade g_t mit der Ebene $x_1 = 0$ einschließt.

d) Zeigen Sie, dass durch g_0 und die x_2-Achse die Ebene $\boldsymbol{E}_t$ eindeutig festgelegt ist. Überprüfen Sie, ob alle Geraden g_t auf derselben Seite von $\boldsymbol{E}_t$ liegen.

e) Berechnen Sie den Schnittpunkt S_t der Geraden g_t mit der x_2x_3-Ebene. Zeigen Sie, dass die Punkte S_t alle auf einer Parabel in der x_2x_3-Ebene liegen. Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel.

Zeichnen Sie die Geraden g_{-4}, g_{-2}, g_0 und g_2 sowie die oben beschriebene Kurve in ein Koordinatensystem. Beschreiben Sie begründend den Verlauf der Geradenschar.



f) Der Graph der Ortskurve aus Teil e) rotiert im Intervall [0;4] um die x_2-Achse. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers. Beschreiben Sie die Form des entstehenden Körpers.

Falls Sie die Ortskurve in Teil e) nicht haben bestimmen können, betrachten Sie die Ortskurve $s_3 = 0{,}5\, s_2^2$.
(Dies ist aber nicht die gesuchte Ortskurve.)

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Man setzt die Koordinaten von Q in $\boldsymbol{E}_t$ ein. Elementare Umformungen liefern $t = -4$. Zunächst bestimmt man eine Parameterdarstellung der Ebene $\boldsymbol{E}_t$ mit folgender Festlegung: $x_2 = \lambda \quad , \quad x_3 = \mu \quad , \quad x_1 = \frac{t}{2} \cdot \lambda - 2\mu$. Dann erhält man als mögliche Darstellung der Ebene $\boldsymbol{E}_t$: $\vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Da der 2. Richtungsvektor unabhängig von t ist und alle Ebenen durch den Ursprung verlaufen, folgt für die Schnittgerade s: $\vec{x} = \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.	15		
b)	Wenn die Ebenen senkrecht zueinander verlaufen sollen, dann muss das Skalarprodukt der Normalenvektoren den Wert 0 ergeben: $\begin{pmatrix} 2 \\ -t \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -t = 0$. Also stehen die Ebenen $\boldsymbol{E}_0$ und $\boldsymbol{H}_0$ senkrecht aufeinander. $\boldsymbol{H}_t$ verläuft parallel zur x_1-x_3-Ebene.	5	10	
c)	Da sich das Schnittgebilde von $\boldsymbol{E}_t$ und $\boldsymbol{H}_t$ durch: $\lambda = t$ beschreiben lässt, folgt für die Schnittgerade g_t: $r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1-t \\ 1-t \\ 2+t \end{pmatrix} = \vec{0}$. Den Winkel zwischen der Ebene $x_1 = 0$ und der Geraden g_t kann man mittels des Normalenvektors der Ebene und des Richtungsvektors der Geraden bestimmen: $\sin\alpha = \left| \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}} \right| = \frac{2}{\sqrt{5}}$. Damit hat der Winkel den Wert $\approx 63{,}4°$.		20	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>
Die Ebene, die durch die x_2-Achse und die Gerade g_0 festgelegt wird, lässt sich in der folgenden Form darstellen:

$$\vec{x} = \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mu, \sigma \in \mathbb{R}.$$

Ein zugehöriger Normalenvektor hat dann die Form $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Wie man sieht, stimmen die Normalenvektoren dieser Ebene und der von $\boldsymbol{E}_0$ bis auf einen Faktor überein. Da beide Ebenen durch den Ursprung verlaufen, sind sie identisch.

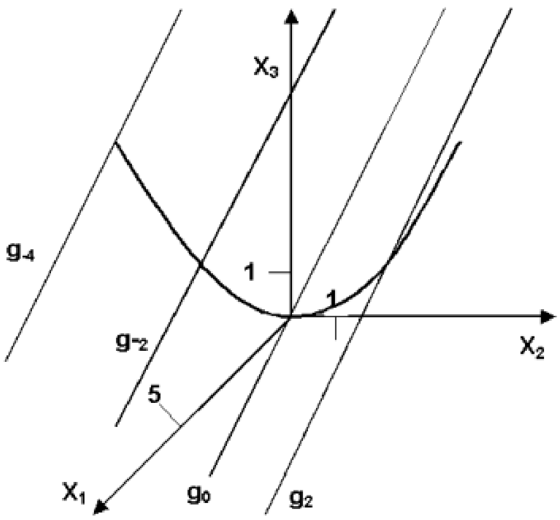
Um zu überprüfen, ob alle Geraden auf derselben Seite von $\boldsymbol{E}_0$ liegen, bestimmt man zunächst die Ebene $\boldsymbol{E}_0$ in folgender Form: $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (x_1 + 2x_3) = 0$.

Anschließend berechnet man den Abstand zwischen der Geraden g_t und der $\boldsymbol{E}_0$ und erhält den Wert: $\frac{t^2}{2\sqrt{5}}$. Der Wert dieses Bruches ist immer positiv, unabhängig von t. Also liegen alle Geraden auf derselben Seite, mit Ausnahme von $t = 0$. Diese Gerade liegt in der Ebene, wie man anhand eines Vergleichs der Richtungsvektoren erkennen kann.
</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>
Da der Schnittpunkt S der Geraden g_t mit der x_2-x_3-Ebene in der ersten Koordinate den Wert 0 annehmen muss, folgt für den Parameter:

$\mu = \frac{t^4}{4}$.

Also hat der Schnittpunkt die Koordinaten

$S_t\,(\,0 \mid t \mid 0{,}25t^2\,)$.



Wenn der Schnittpunkt (allgemein) die Koordinaten $S(s_1 \mid s_2 \mid s_3)$ hat, dann hat s_2 den Wert t und s_3 den Wert $\frac{t^2}{4}$. Also folgt für die Ortskurve der Schnittpunkte: $s_3 = 0{,}25\,{s_2}^2$. Der zugehörige Graph ist eine Parabel.

Die Graphen der Scharen verlaufen parallel, denn die Richtungsvektoren stimmen überein, da der Parameter t nur im Ortsvektor auftritt.
</td><td></td><td>5</td><td>10</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	Der entstehende Körper ist ein kegelförmiges Gebilde. Der Radius des Grundkreises beträgt 4 LE, die Körperhöhe ebenfalls, die Mantellinie ist allerdings keine Gerade, sondern ein Parabelbogen. Für das Volumen des Rotationskörpers um die x_2-Achse erhält man: $V = \pi \cdot \int_0^4 \frac{1}{16} x^4 dx$. Berechnet man dieses Integral, so folgt: V = 12,8 π.			15
	Insgesamt 100 BWE	20	55	25

Aufgabe 4: Vektoren und Körper — Gy, GS

Aufgabenstellung

Sei der Punkt P (5 | 2 | 1) gegeben. Diesen Punkt verschieben die drei Vektoren $\vec{t}, \vec{u}$ und $\vec{v}$ auf die Punkte A, B und C, wobei gilt: $\vec{t} := \overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{u} := \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{v} := \overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, $z > 0$. Die drei Vektoren weisen alle dieselbe Länge auf. Die Punkte A, B und C liegen auf der Ebene ***E*** und definieren sie.

a) Bestimmen Sie aus den Angaben den Vektor $\vec{v}$.

b) Geben Sie die Ebene ***E*** in Parameter- und in Koordinatenform an.

Der Punkt D liegt ebenfalls in ***E*** und in einer Ebene, die parallel zur y-z-Ebene durch P geht. Weiterhin ist $\vec{w} := \overrightarrow{PD}$ und hat die gleiche Länge wie $\vec{v}$.

c) Geben Sie die Gleichungen an, aus denen Sie die Koordinaten von D erhalten können.

d) Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{200}{41} \\ -\frac{45}{41} \end{pmatrix}$ die Bedingungen erfüllt.

e) Stellen Sie $\vec{w}$ als Linearkombination von $\vec{t}, \vec{u}$ und $\vec{v}$ dar.

f) Welche Art von Viereck ist das Viereck $ADBC$? Begründen Sie.

g) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide, die das Viereck $ADBC$ als Grundfläche und P als Spitzenpunkt hat.

h) Die Ebene ***E'*** ist zu ***E*** parallel. Bekannt ist weiterhin über ***E'***:

- In ***E'*** liegen die vier Punkte A', B', C' und D' so, dass jeweils die Verbindungsstrecke vom ungestrichenen zum gestrichenen Punkt durch P geht.
- Das Volumen der so entstehenden Pyramide $PA'D'B'C'$ ist doppelt so groß wie das der Pyramide $PADBC$.

Zwischen den beiden Ebenen ***E*** und ***E'*** laufen nun Kugeln, die beide Ebenen berühren. Welches Volumen weisen diese Kugeln auf?

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Da $\lvert \vec{t} \rvert = 5$, muss $z = 5$ gelten und deswegen $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.	5		
b)	Standardmäßiges Einsetzen ergibt $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $E:\ 5y - 4z = -14$.	10		
c)	D muss die x-Koordinate mit P gemeinsam haben, also (1) $x_D = 5$. D liegt in $\boldsymbol{E}$, also erfüllen die Koordinaten die Parametergleichung (2) $5y_D - 4z_D = -14$. $\lvert \overrightarrow{PD} \rvert = 5$, also (3) $(y_D - 2)^2 + (z_D - 1)^2 = 25$.		15	
d)	Wenn $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{200}{41} \\ -\frac{45}{41} \end{pmatrix}$, dann ergibt sich D aus $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OP} + \vec{w}$ zu $D = (5 \mid \frac{-118}{41} \mid \frac{-4}{41})$. Einsetzen dieser Koordinaten in die Gleichungen (1), (2) und (3) erfüllt die Gleichungen. (Hinweis: Die Lösung der Gleichungen (1) – (3) liefert neben D noch richtigerweise den Punkt C als Lösung.)	5	10	
e)	Lösung des zugehörigen LGS ergibt $\vec{w} = \frac{25}{41} \cdot \vec{t} + \frac{25}{41} \cdot \vec{u} - \frac{9}{41} \cdot \vec{v}$.		10	
f)	Auf Grund der Aufgabenstellung ist der Schnitt von $\boldsymbol{E}$ und der Ebene durch P eine Symmetrieachse des Vierecks. Damit handelt es sich bei dem Viereck bereits um ein Drachenviereck. (Hinweise: i) Da weiterhin $\lvert \overrightarrow{BC} \rvert = \sqrt{50} \neq \sqrt{\frac{450}{41}} = \lvert \overrightarrow{BD} \rvert$, ist das Viereck ADBC tatsächlich ein Drachen, der keine Raute ist. ii) Bestimmung der vier (!) Abstände benachbarter Punktpaare liefert ebenfalls die Lösung, da die Abstände von einem Paar gegenüberliegender Punkte zu ihren Nachbarn jeweils gleich sind.)		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
g)	Denkbare Lösungswege laufen über i) die Anwendung des Spatprodukts oder über ii) den Abstand von *P* zu ***E*****.** i) Bei der Anwendung des Spatproduktes ist es sinnvoll, die Viereckspyramide in zwei Dreieckspyramiden zu zerlegen und nur mit Beträgen zu rechnen: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(\left\| (\vec{t} \times \vec{u}) \cdot \vec{v} \right\| + \left\| (\vec{t} \times \vec{u}) \cdot \vec{w} \right\| \right) = \frac{1000}{41}$. (Hinweis: Die Wahl von $\vec{t} \times \vec{u}$ für den Kreuzproduktteil des Spatproduktes bietet sich an, weil die beiden Vektoren in beiden Teilpyramiden die „Grundfläche“ bilden können und weil leicht ersichtlich ihr Kreuzprodukt nur eine z-Komponente haben kann.) ii) Die Anwendung der Formel des Abstands eines Punktes von einer Ebene liefert hier (mit P außerhalb von ***E***, *C* innerhalb von ***E*** und den beiden Richtungsvektoren aus b) $F = 0{,}5 \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{CD}\right\|$. Zur Bestimmung der Fläche des Vierecks sollte das Wissen um seine Art (siehe f)) ausgenutzt werden. Seine Fläche kann einfach bestimmt werden durch $F = 0{,}5 \cdot \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{CD}\right\|$. Es ergibt sich $A = \frac{150}{\sqrt{41}}$. Damit ergibt sich das Volumen zu $V = \frac{1000}{41} \approx 24.39024$.		25	
h)	Die beiden Pyramiden sind (nach Strahlensätzen) ähnlich, deswegen verhalten sich ihre Maße wie die dritte Wurzel aus dem Volumenverhältnis. Die Höhen der beiden Pyramiden verhalten sich also wie $\sqrt[3]{2} : 1 \approx 1{,}25992 : 1$. Damit ist der Abstand der beiden Ebenen das $(1 + \sqrt[3]{2})$-fache des Abstandes von *P* zu ***E***. Der ergab sich in g) ii) zu $h = \frac{20}{\sqrt{41}}$. (Hier muss, falls bei g) der Weg i) gewählt worden ist, dieser Wert neu berechnet werden.) Unter Verwendung der bekannten Volumenformel für Kugeln ergibt sich $V_{Kugel} \approx 184{,}15886$**.**	5		15
	Insgesamt 100 BWE	25	60	15

Aufgabe 5: Haus mit Dach **Gy, GS, TG, WG**

Eine eingekleidete Aufgabe. Ein Haus ist durch die Begrenzungspunkte der Bodenfläche, des Fußbodens des Speichers und die Begrenzungspunkte des Daches gegeben. Es soll ein Schrägbild des Gebäudes angefertigt werden; verschiedene Neigungswinkel und das Flächenmaß einer Dachfläche sind zu bestimmen. Ein Antennenmast geht vom Speicherfußboden durch das Dach ins Freie und wird durch eine Stütze am Dach befestigt. Der Durchstoßpunkt sowie die Länge der Stütze sind zu bestimmen. Weiter ist die Höhe eines Torbogens in der Vorderfront, der durch die Angabe von drei Punkten bestimmt ist, gesucht.
Diese Aufgabe stammt – mit Änderung in Teil g – aus der Zentralabiturprüfung LK Nr. 1999/1, Baden-Württemberg.

Aufgabenstellung

Ein quaderförmiges Haus mit aufgesetztem Dach ist am Boden durch die Punkte

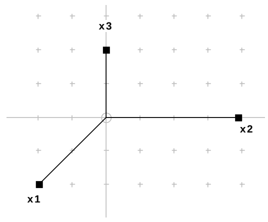
$B_1\ (0 \mid 0 \mid 0)$, $B_2\ (10 \mid 0 \mid 0)$, $B_3\ (10 \mid 12 \mid 0)$ und $B_4\ (0 \mid 12 \mid 0)$ und am Fußboden des Speichers durch die Punkte

$S_1\ (0 \mid 0 \mid 10)$, $S_2\ (10 \mid 0 \mid 10)$, $S_3\ (10 \mid 12 \mid 10)$ und $S_4\ (0 \mid 12 \mid 10)$ festgelegt.

Den Dachabschluss bilden die Punkte
$D_1\ (2 \mid 3 \mid 12)$, $D_2\ (6 \mid 3 \mid 12)$, $D_3\ (6 \mid 9 \mid 12)$ und $D_4\ (2 \mid 9 \mid 12)$
als horizontal liegendes Rechteck. (Angaben in Meter)

Die Strecken $\overline{S_1D_1}$, $\overline{S_2D_2}$, $\overline{S_3D_3}$ und $\overline{S_4D_4}$ sind Dachkanten.

a) Zeichnen Sie ein Schrägbild des Gebäudes samt Dach.
(Längeneinheit $1\text{cm} \cong 1\text{m}$; Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung $0{,}5\cdot\sqrt{2}$;
Winkel zwischen x_1- und x_2-Achse 135°)



b) Bestimmen Sie den Neigungswinkel der Dachkante $\overline{S_2D_2}$ gegen den Fußboden des Speichers.

c) Wie groß ist der Winkel zwischen der Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$ und dem Fußboden des Speichers?

d) Berechnen Sie das Flächenmaß der Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$.

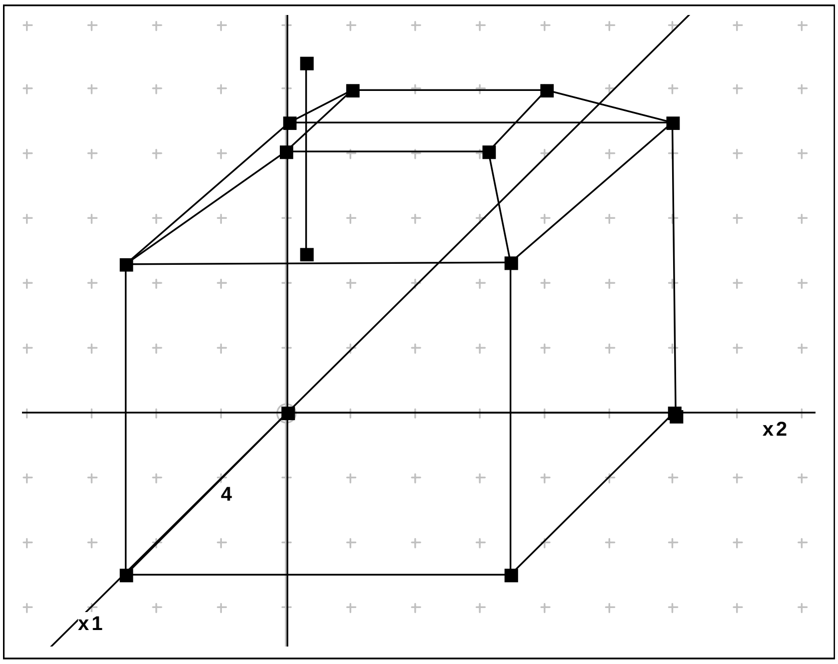
Im Punkt $A\ (9 \mid 5 \mid 10)$ wird ein 6m langer Antennenmast, der das Dach durchstößt, senkrecht auf dem Fußboden des Speichers montiert.

e) Wie weit ragt der Mast aus dem Dach ins Freie?

f) Vom Mittelpunkt des Mastes aus ist eine Stütze senkrecht zur Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$ angebracht. Wie lang ist diese Stütze, wenn sie auf dieser Dachfläche endet?

g) In der Vorderfront des Hauses befindet sich ein Torbogen. Er hat die Form eines Kreisbogens und geht durch die Punkte $K_1\ (10 \mid 3 \mid 0)$, $K_2\ (10 \mid 9 \mid 0)$ und $K_3\ (10 \mid 4 \mid 2)$.
Wie hoch ist der Torbogen?

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)		10		
b)	Die Dachkante $\overline{S_2D_2}$ hat den Richtungsvektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}$. Die Ebene $\boldsymbol{E_1}$, auf der der Speicherfußboden liegt, ist parallel zur x_1x_2-Ebene; ein Normalenvektor ist $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Für den gesuchten Winkel α erhält man aus $\sin\alpha = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\lvert\vec{v}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}$ den Winkelbetrag $\alpha \approx 21{,}80°$.	5	5	
c)	Sei $\boldsymbol{E_2}$ die Ebene, auf der die Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$ liegt. Eine Parameterform der Ebenengleichung von $\boldsymbol{E_2}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}10\\0\\10\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\12\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\-2\end{pmatrix}$, $r, s \in \mathbb{R}$. Eine Koordinatenform der Ebenengleichung von $\boldsymbol{E_2}$: $x_1 + 2x_3 = 30$. Mit Hilfe der Normalenvektoren $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ von $\boldsymbol{E_1}$ und $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ von $\boldsymbol{E_2}$ und der Formel $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\lvert\overrightarrow{n_1}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{n_2}\rvert}$ erhält man $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ und somit $\alpha \approx 26{,}57°$.	5	10	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>Die Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$ ist ein Trapez ($S_2S_3 \parallel D_2D_3$). Länge der parallelen Seiten: $d(S_2,S_3) = 12$ m, $d(D_2,D_3) = 6$ m.

Zur Bestimmung der Höhe kann die Gerade g bestimmt werden, die in $\boldsymbol{E_2}$ verläuft, durch D_2 geht und orthogonal zu S_2S_3 ist.

Mit Hilfe des Ansatzes g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Koordinatenform von $\boldsymbol{E_2}$ erhält man für x den Wert –2. Der Schnittpunkt von g und S_2S_3 ist $S(10|3|10)$. Die Länge der Strecke $\overline{D_2S}$ beträgt $\sqrt{20}$. Die Höhe des Trapezes beträgt also $\sqrt{20}$ m.

Damit ergibt sich für das Flächenmaß der Dachfläche $S_2S_3D_3D_2$:

$F = 9 \cdot \sqrt{20}\ \text{m}^2 \approx 40{,}25\ \text{m}^2$.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Berechnung des Durchstoßpunktes S des Mastes durch die Dachfläche:

Ansatz: $\vec{m} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt für den Durchstoßpunkt: $S\,(9|5|10+r)$.

Mit Hilfe der Koordinatenform von $\boldsymbol{E_2}$ ergibt sich $r = 0{,}5$ und damit $S\,(9|5|10{,}5)$. Der Mast ragt also 5,50 m aus dem Dach.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Der Mittelpunkt des Mastes ist $M\,(9|5|13)$. Die Gerade g, die durch M geht und orthogonal zur Dachfläche ist, kann durch folgende Parameterform angegeben werden: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Für den Endpunkt E der Stütze gilt demnach $E\,(9+r|5|13+2r)$. Mit Hilfe der Koordinatenform von $\boldsymbol{E_2}$ erhält man für $r = -1$ und damit E (8|5|11). Die Länge der Strecke $\overline{ME}$ beträgt $\sqrt{5}$. Somit ist die Stütze ca. 2,24 m lang.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>g)</td><td>Der Mittelpunkt des Kreises, auf dem der Torbogen liegt, ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $\overline{K_1K_3}$ und von $\overline{K_1K_2}$. Die Mittelsenkrechte von $\overline{K_1K_3}$ geht durch den Mittelpunkt $M\,(10|3{,}5|1)$ von $\overline{K_1K_3}$ und hat $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor. Geradengleichung: m_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Eine Geradengleichung der Mittelsenkrechten von $\overline{K_1K_2}$ ist: m_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden und damit der Mittelpunkt des Kreises ist $K\,(10\|6\|-0{,}5)$. Der Radius r des Kreises ist der Abstand von K zu K_1, also $r = \sqrt{9{,}0625} \approx 3{,}01$. Da sich der Mittelpunkt des Kreises 0,25 m unter dem Erdboden befindet, hat der Torbogen eine Höhe von 2,76 m.			20
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

.

Aufgabe 6: Tribüne — Gy, GS, TG, WG

Über einer schrägen Tribüne ist ein rechteckiges schräges Dach angebracht, das an zwei Stützen befestigt ist und von zwei Befestigungsseilen gehalten wird. Die beiden Ebenen sind einmal durch drei Punkte, zum anderen durch eine Koordinatengleichung gegeben. Das Dachrechteck wird durch zwei Eckpunkte und den Diagonalenschnittpunkt gegeben. Gesucht werden der Abstand eines Dachpunktes von der Tribüne, die Begrenzungspunkte des Schattenvierecks des Daches auf der Tribüne, der Winkel zwischen Befestigungsseil und Dachfläche sowie der Betrag einer Komponente einer Kraft.

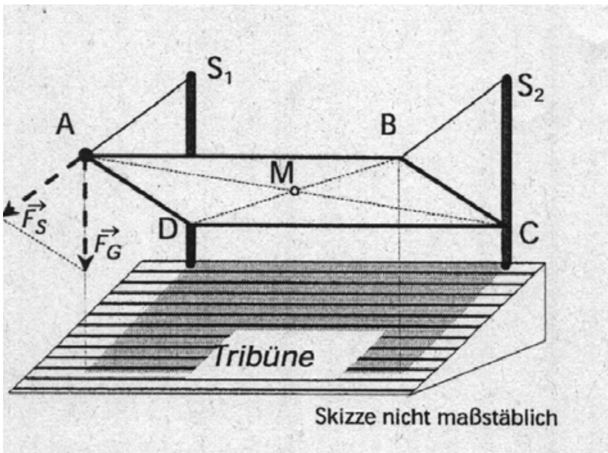
Aufgabenstellung

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte
$A\,(6|-12|\,22)$, $B\,(38|\,4|\,22)$, $M\,(19|\,2|\,19)$ und die Ebene $\boldsymbol{E_1}$: $2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 65$ gegeben.

a) Die Punkte A, B und M bestimmen eine Ebene $\boldsymbol{E_2}$.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von $\boldsymbol{E_2}$ und berechnen Sie den Winkel, den $\boldsymbol{E_2}$ mit der x_1x_2-Ebene einschließt.
[Mögliches Ergebnis: $\boldsymbol{E_2}$: $-x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 80$.]

b) Die Punkte A und B seien Eckpunkte, der Punkt M sei Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms $ABCD$.
Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte C und D und zeigen Sie, dass dieses Parallelogramm ein Rechteck ist.

Das Dach über dem Teilbereich einer Tribüne sei durch das in Aufgabenteil b) genannte Rechteck $ABCD$ beschrieben.
Die x_1x_2-Ebene sei die Horizontalebene.
In den Punkten C und D ist das Dach an zwei zur Horizontalebene senkrecht stehenden Masten befestigt. Von den Punkten $S_1\,(0\,|0\,|26)$ und $S_2\,(32\,|16\,|\,26)$ führt jeweils ein Befestigungsseil zum Punkt A bzw. zum Punkt B.
Die Tribüne liege in der Ebene $\boldsymbol{E}_1$.
Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter.



c) Im Punkt M soll ein Kontrollgerät installiert werden. Aus technischen Gründen ist ein Abstand zur Tribüne von mindestens 10 m vorgeschrieben. Prüfen Sie, ob diese Vorschrift erfüllt wird.

d) Die Punkte $A'\,(6\,|-12\,|1)$, B', C' und D' seien die Projektionen der Punkte A, B, C und D auf die Tribüne mittels zur Horizontalebene senkrechter Strahlen. Berechnen Sie die Koordinaten von B', C' und D'.
A', B', C' und D' seien die Eckpunkte der überdachten Fläche der Tribüne. Bestimmen Sie das Flächenmaß dieser Fläche.

e) Berechnen Sie den Winkel, den die Seile mit dem Dach einschließen.
Im Punkt A wirkt eine Gewichtskraft $\overrightarrow{F_G}$, mit $|\overrightarrow{F_G}| = 10\,000$ N, senkrecht zur Horizontalebene.
Diese Kraft kann in eine Komponente $\overrightarrow{F_s}$, die in Richtung der Befestigungsseile wirkt, und in eine Komponente, die in Richtung des Punktes D wirkt, zerlegt werden.
Ermitteln Sie den Betrag der Kraft $\overrightarrow{F_s}$.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Koordinatengleichung von $\boldsymbol{E}_2$: $-x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 80$.
Ein Normalenvektor der x_1x_2-Ebene: $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ein Normalenvektor von $\boldsymbol{E_2}$: $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Für den Schnittwinkel gilt dann:
$\cos\alpha = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \frac{5}{\sqrt{30}}$. $\alpha \approx 24{,}09°$.</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Bestimmung von C: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AM} \Rightarrow C\,(32\,|16\,|16)$,
Bestimmung von D: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + 2 \cdot \overrightarrow{BM} \Rightarrow D\,(0\,|0\,|16)$.
Nachweis der Rechteckeigenschaften: Es genügt zu zeigen, dass einer der Winkel ein rechter ist.
Es gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 32 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$. Das Skalarprodukt der beiden Vektoren beträgt 0; also stehen sie senkrecht aufeinander.
Es kann auch gezeigt werden, dass die Diagonalen gleich lang sind.</td><td>5</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Abstand von M zu $\boldsymbol{E_1}$: Sei g die Gerade durch M, die senkrecht auf $\boldsymbol{E_1}$ steht.
Eine Geradengleichung von g ist: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 19 \\ 2 \\ 19 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$. Durch Einsetzen der Komponenten von $\vec{x}$ in die Gleichung von $\boldsymbol{E_1}$ ergibt sich:
$r = -\frac{4}{3}$. Damit hat der Vektor $\overrightarrow{SM}$ den Betrag $\sqrt{80}$.
Der Abstand ist demnach geringer als 10 m.</td><td></td><td>25</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Flächenmaß der überdachten Fläche:
Da die Fläche ABCD ein Rechteck ist, ist die senkrecht projizierte Fläche ebenfalls ein Rechteck.
A' ist angegeben; B', C', D' unterscheiden sich von den Urbildpunkten lediglich in der x_3-Komponente, die man durch Einsetzen in die Ebenengleichung von E_1 erhält.
Ergebnis: B' (38 |4 |1), C' (32 |16 |13), D' (0 | 0 |13).
Das Flächenmaß F des Rechteckes ist das Produkt der Beträge von $\overline{A'B'}$ und $\overline{A'D'}$.
$F = 18 \cdot \sqrt{1280} = 643{,}987...$FE.
Die überdachte Fläche hat ein Maß von circa 644 m^2.</td><td></td><td>20</td><td>5</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
e)	Winkel α zwischen Seil und Dach: $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix}-6\\12\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\12\\-6\end{pmatrix}}{14\cdot 6\sqrt{6}} = \dfrac{13\cdot\sqrt{6}}{42} \approx 0{,}7582.$ Daraus folgt: $\alpha \approx 40{,}7\,°$. Betrag der Kraftkomponente: Es gilt: $\overrightarrow{F_G} = \overrightarrow{F_S} + \overrightarrow{F_D}$ mit $\overrightarrow{F_S} = r\cdot\overrightarrow{S_1A}$ und $\overrightarrow{F_D} = t\cdot\overrightarrow{AD}$. Es gilt also: $\begin{pmatrix}0\\0\\-10000\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}6\\-12\\-4\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-6\\12\\-6\end{pmatrix}$. Daraus erhält man $r = t = 1000$. Damit gilt: $\lvert\overrightarrow{F_S}\rvert = 14\,000$ N. $\overrightarrow{F_S}$ hat einen Betrag von 14 000 N.			15
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20

Aufgabe 7: Meteoriteneinschlag   Gy, GS, TG

Aufgabenstellung

In sternklaren Nächten in den Ebenen von Kansas beobachten die beiden Amateurastronomen Myers und Smith den Himmel auf der Suche nach Meteoren und Meteoriten. Smith hat dabei eine Beobachtungsposition, die gegenüber der von Myers fünf Kilometer weiter westlich und drei Kilometer weiter nördlich ist. – Sehen Sie für diese Aufgabe den Erdboden von Kansas als Ebene an und setzen Sie Smith in den Koordinatenursprung.

In der Nacht zum 4. März beobachten sie beide einen Meteoriten. Seine Feuerspur beginnt irgendwo hoch in der Atmosphäre und endet beim Eintritt in die dichtere, untere Atmosphäre. Grundsätzlich bezeichnen sie diese beiden wesentlichen Punkte der Bahn des Meteors mit „Upper Event (U)“ und „Lower Event (L)“.

Sie können beide nur jeweils die Richtung angeben, in der sie die beiden Ereignisse sehen; wenn sie sich über diese Punkte verständigen, so geben sie jeweils einen Richtungsvektor an, der jeweils von ihnen zum Ereignispunkt zeigt. Die Koordinaten der Richtungsvektoren sind kartesisch mit den Koordinatenachsen in Ostrichtung, in Nordrichtung und senkrecht nach oben.

Gehen Sie für diese Aufgabe davon aus, dass die Bahn des Meteoriten eine Gerade ist.

Für das Ereignis am 4. März ermitteln die beiden folgende vier Richtungsvektoren:

$$\overrightarrow{r_{My,U}} = \begin{pmatrix} -0,250 \\ 0,225 \\ 1 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{r_{My,L}} = \begin{pmatrix} -0,125 \\ 0,625 \\ 1 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{r_{Sm,U}} = \begin{pmatrix} -0,125 \\ 0,150 \\ 1 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{r_{Sm,L}} = \begin{pmatrix} 0,500 \\ 0,250 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie aus diesen Werten die Koordinaten von U und L.

b) Welchen räumlichen Abstand hatten U und L?

Der Meteorit schlug am Ende seiner Bahn im Punkt K auf dem Erdboden auf.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Aufschlagpunktes K,

d) entscheiden Sie, für welchen der beiden Beobachter der Aufschlagpunkt näher ist, und

e) berechnen Sie für diesen die Richtung und die Entfernung, die er bis zum Aufschlagpunkt zurücklegen muss. Geben Sie dabei die Richtung in Grad gegenüber der Nordrichtung an.

f) Am Punkt L spalteten sich vom Meteoriten einige kleinere Teile ab. Diese Teile beschreiben ebenfalls gerade Bahnen, die sich höchstens um 1° von der Bahn des zentralen Meteoriten unterschieden. Welche Ausmaße hat etwa das Feld, auf dem der ganze Meteoritenschauer niederging? Begründen Sie die Genauigkeit Ihrer Aussage.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Der Aufgabenteil fragt zweimal nach dem Schnittpunkt je zweier Geraden im Raum, wobei vorausgesetzt ist, dass diese Schnittpunkte existieren. Zunächst müssen die Beobachter und Richtungen im Koordinatensystem fixiert sein. Laut Aufgabe befindet sich Smith am Ursprung des KS, und die drei Koordinatenrichtungen sind Ost – Nord – Zenith. Dann befindet sich Smith am Punkt $S\,(\,0 \mid 0 \mid 0\,)$ und Myers am Punkt $M\,(\,5 \mid -3 \mid 0\,)$. Damit ergibt sich für die beiden Geraden zu U $u_S : \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -0{,}125 \\ 0{,}15 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $u_M : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -0{,}250 \\ 0{,}225 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und für die beiden Geraden zu L $l_S : \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0{,}500 \\ 0{,}250 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $l_M : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -0{,}125 \\ 0{,}625 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. (Die gleiche z-Komponente entspricht natürlich der Forderung, dass U bzw. L für beide Beobachter gleich hoch sein müssen.) Die Lösung des ersten GLS ergibt $\lambda = \mu = 40$ und damit $U\,(-5 \mid 6 \mid 40\,)$, die Lösung des zweiten GLS ergibt $\lambda = \mu = 8$ und damit $L\,(\,4 \mid 2 \mid 8\,)$.	3	15 10	
b)	Mit Hilfe der üblichen Abstandsbestimmung ergibt sich $d = \sqrt{1121}\,km \approx 33{,}5\,km$.	6		
c)	Die Bahn des Meteoriten ist eine Gerade durch U und L und lässt sich damit durch die Gleichung $b: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -32 \end{pmatrix}$ beschreiben. Im Punkt K ist die z-Koordinate Null; dies ergibt $t = 0{,}25$. Eingesetzt für die beiden anderen Koordinaten ergibt dies $K\,(\,6{,}25 \mid 1 \mid 0\,)$.		15	
d)	Es ergibt sich $d(KS) \approx 6{,}33\,km$ und $d(KM) \approx 4{,}19\,km$. Myers ist also näher am Aufschlagpunkt.	10		
e)	Die Richtung für Myers ergibt sich aus dem Vektor $\overrightarrow{MK} = \begin{pmatrix} 1{,}25 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$: Der Winkel α seines Weges, angegeben Nord $\rightarrow$ Ost, bestimmt sich durch $\tan \alpha = \frac{1{,}25}{4}$ zu $\alpha \approx 17{,}4^0$. Die Länge seines Weges ist, wie berechnet, knapp 4,2 km.		14	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	Hier ist folgender Ansatz sinnvoll: Der Weg von L nach K auf b bestimmt sich zu $d(LK) \approx 8{,}37\,km$. Eine Winkelabweichung von 1° auf dieser Strecke ergibt eine Wegabweichung von $ds = d(LK) \cdot \tan 1° \approx 146\,m$. „Etwa ein Grad" in der Aufgabenstellung bedeutet, dass die Wegabweichung keineswegs genauer als auf 10 m genau bestimmt werden kann – eine Unsicherheit von beispielsweise ±0,1° entsprechend 10% führt wegen der Fast-Linearität des Tangens im Bereich kleiner Winkel zu einer Unsicherheit von ds im gleichen Maß, also von etwa ±15m. Die Meteoritenteile werden also innerhalb eines Kreises von etwa 150 m Radius um K liegen. (Hinweise: Es ist bei dieser Abschätzung unerheblich, ob der Sinus oder der Tangens verwendet wird. Ebenso spielt der Sachverhalt keine Rolle, dass die Auftrefffläche streng genommen elliptisch ist, wobei das errechnete ds die kleine Halbachse darstellt und sich die große Halbachse berechnen lässt durch $a = \frac{b}{\cos\vartheta}$, wobei ϑ der Zenithwinkel der Bahn ist. Da der Meteorit fast senkrecht einschlägt, ist diese Korrektur nicht wesentlich.)	3	6	18
	Insgesamt 100 BWE	22	60	18

Aufgabe 8: Abbildungsmatrizen — Gy, GS

Aufgabenstellung

Im Koordinatensystem liegt ein gleichseitiges Dreieck *ABC* mit

$A\,(\,0 \mid 0\,),\ B\,(\,2 \mid 0\,),\ C\,(\,1 \mid \sqrt{3}\,)$.

Betrachtet werden zwei lineare Abbildungen μ und ν.

Über die lineare Abbildung μ ist bekannt:

- μ lässt die Punkte *A* und *B* fest und
- bildet das Dreieck *ABC* auf ein flächengleiches rechtwinkliges Dreieck ab.

Die lineare Abbildung ν hingegen

- bildet den Punkt *A* auf *B* ab, den Punkt *B* auf *C* und den Punkt *C* auf *A*.

a) Begründen Sie, dass mit den bisherigen Angaben die Abbildung μ noch nicht eindeutig bestimmt ist, sondern dass vier Abbildungen in Frage kommen.

b) Wählen Sie als μ_1 diejenige Abbildung aus, bei der $\mu_1(C)$ „links oben" ist, als μ_2 diejenige, bei der $\mu_2(C)$ „rechts unten" ist. Bestimmen Sie die Abbildungen μ_1 und μ_2.

c) Was bewirkt $\mu_2 \circ \mu_1$? Welche Abbildung wird demzufolge durch $(\mu_2 \circ \mu_1)^2$ beschrieben?

d) Welche Art von linearer Abbildung ist ν?

e) Geben Sie ν an.

f) Welche Bahn beschreibt $P\,(\,1 \mid 1\,)$ unter fortgesetzter Anwendung von ν?

g) Argumentieren Sie: Ist $\mu_1 \circ \nu$ dieselbe Abbildung wie $\nu \circ \mu_1$? (Sie müssen nicht nachrechnen; tun Sie dies nur, wenn Ihnen Zeit geblieben ist.)

h) Sei φ die Abbildung, die durch die Matrix $K = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ beschrieben wird. Beweisen Sie, dass durch φ die Gerade $g_1:\ \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R},$ auf sich selbst abgebildet wird.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Es gibt vier flächengleiche rechtwinklige Dreiecke mit gleicher Seite auf der x-Achse. Sie bilden den Punkt C ab auf $C'_1\,(0 \mid \sqrt{3})$; $C'_3\,(2 \mid \sqrt{3})$; $C'_4\,(0 \mid -\sqrt{3})$; $C'_2\,(2 \mid -\sqrt{3})$.		10	
b)	Alle Abbildungen μ haben keinen Verschiebungsteil, sie lassen sich als 2 x 2 – Matrizen darstellen. Die x-Achse bleibt unverändert, und mit den aus den Abbildungen von C leicht zu ersehenden Drehungen *der y*-Achse ergibt sich $\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. (Es lässt sich ebenso ein Rechenweg über die Lösung von je zwei 2x2-LGS denken.)	10		
c)	(Niveau II) Mit Hilfe der Matrizenmultiplikation ergibt sich $\mu_2 \circ \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, die Matrix der Spiegelung an der x-Achse. (Niveau I) $(\mu_2 \circ \mu_1)^2$ beschreibt damit die identische Abbildung mit der Einheitsmatrix.	5	8	
d)	ν ist eine Drehung um 120° im mathematisch positiven Sinn um den Mittelpunkt des Dreiecks, also um $M\,(1 \mid 1 \mid \sqrt{3})$.		5	
e)	Zur Errechnung der sechs Parameter ist es hier sinnvoll, die Abbildungen der Punkte zu verwenden, beginnend mit ν $(A) = B$. Es ergibt sich $\nu\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. (Selbstverständlich kann auch der Weg über die Struktur von ν begangen werden.)		25	
f)	Da (siehe d)) ν eine Drehung um einen festen Punkt ist und der Drehwinkel 120° beträgt, ist die Bahn von P zyklisch, und es gilt $\nu^{3k+l}(P) = \nu^{l}(P)$. (Nachrechnen liefert: $\nu\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$; $\nu\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$; $\nu\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.)		12	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>g)</td><td>Die Abbildungen $\mu_1 \circ \nu$ und $\nu \circ \mu_1$ sind nicht gleich; es macht einen Unterschied, ob man erst dreht und dann schert oder erst schert und dann dreht.
(Nachrechnen ergibt:
$(\mu_1 \circ \nu)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix};$
$(\nu \circ \mu_1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.)$</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>h)</td><td>Zu zeigen ist: Sei $P = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \in g_1$. Dann ist $\varphi(P) \in g_1$.
Es gilt: $\varphi(P) = K \cdot \lambda \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = 2\lambda \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$
Damit liegt φ(P) ebenfalls auf g_1; genauer gesagt, φ bildet auf g_1 alle Punkte jeweils auf den doppelten Ursprungsabstand ab. Damit sind zugleich alle Punkte auf g_1 Bilder anderer Punkte von g_1.</td><td></td><td>5</td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>65</td><td>15</td></tr>
</table>

Aufgabe 9: Abbildungsschar — Gy, GS

Aufgabenstellung

Betrachtet wird eine Schar μ_c linearer Abbildungen R³ → R³, die durch Matrizen der Form

$M_c = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & c & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

a) Begründen Sie folgende Aussage: „Für keine der Abbildungen μ_c gilt, dass unter ihr die Bilder der Einheitsvektoren $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ alle aufeinander senkrecht stehen.“

b) Bestimmen Sie c so, dass $\mu(\vec{e_1}) \perp \mu(\vec{e_2})$. Wie groß ist mit diesem errechneten c das Volumen des Bildes vom Einheitswürfels unter dieser Abbildung μ_c? (Der Einheitswürfel ist der Würfel, der von den Einheitsvektoren aufgespannt wird.)

c) Bestimmen Sie c so, dass das Volumen eines Einheitswürfels unter diesem μ_c erhalten bleibt.

Sei jetzt $c = 0$. Setzen Sie voraus: Die drei Vektoren $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden ein minimales Erzeugendensystem des R³.

d) Entscheiden Sie: Sind $\mu_0(\vec{a_1})$, $\mu_0(\vec{a_2})$ und $\mu_0(\vec{a_3})$ linear unabhängig?
Was ist demzufolge der Bildraum μ_0[R³], das Bild des R³ unter μ_0 ?

Geben Sie für μ_0[R³] ein minimales Erzeugendensystem an.

e) Ermitteln Sie das Urbild des Nullvektors unter μ_0. Diese Teilmenge des R³ möge h heißen. Geben Sie ein minimales Erzeugendensystem von h an.

[Zur Kontrolle: $h\colon\ \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$]

f) Ergänzen Sie dieses minimale Erzeugendensystem von h zu einem minimalen Erzeugendensystem des R³.

g) Beweisen Sie:
Wenn dieses minimale Erzeugendensystem von h zu einem minimalen Erzeugendensystem des R³ ausgeweitet wird, so formen die Bilder der hinzugekommenen Vektoren unter μ_0 ein minimales Erzeugendensystem von μ_0[R³].

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die erste Spalte der Matrix ist das Bild des Einheitsvektors in x_1-Richtung, die dritte entsprechend in x_3-Richtung. Das Skalarprodukt dieser Vektoren ist $2 \neq 0$. Damit sind diese beiden Vektoren unabhängig von der Wahl von c nicht zueinander senkrecht.	10		
b)	Es soll gelten: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 3 \end{pmatrix} = 0$, also $c = -1$.		5	
	$V = \left\| \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 2$. Das Volumen des abgebildeten Einheitswürfels beträgt 2.		10	
c)	Hier ist eine Umordnung der eben verwendeten Gleichung sinnvoll: $V = \left\| \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = 1$. Dies ergibt $c = \frac{1}{2}$.		10	
d)	Zunächst: $\mu_0(\overrightarrow{a_1}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\mu_0(\overrightarrow{a_2}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mu_0(\overrightarrow{a_3}) = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$.		3	
	Das zugehörige LGS $\begin{array}{l} 2\lambda - 2\mu - 6\nu = 0 \\ 3\lambda + 3\mu + 7\nu = 0 \\ 12\lambda \qquad - 4\nu = 0 \end{array}$ hat neben der trivialen Lösung die Lösung $\lambda = \frac{1}{3}\nu$ und $\mu = -\frac{8}{3}\nu$. Damit sind die drei Bildvektoren zunächst einmal voneinander linear abhängig, und es gilt z.B.		7	
	$\mu_0(\overrightarrow{a_3}) = \frac{8}{3}\mu_0(\overrightarrow{a_2}) - \frac{1}{3}\mu_0(\overrightarrow{a_1})$.		5	
	Der Bildraum des R³ unter μ_0 ist damit darstellbar z.B. durch $\mu_0(\eta\overrightarrow{a_1} + \iota\overrightarrow{a_2} + \kappa\overrightarrow{a_3}) = \eta \cdot \mu_0(\overrightarrow{a_1}) + \iota \cdot \mu_0(\overrightarrow{a_2}) + \kappa \cdot \mu_0(\overrightarrow{a_3})$ $= \eta \cdot \mu_0(\overrightarrow{a_1}) + \iota \cdot \mu_0(\overrightarrow{a_2})$. Beispielsweise bilden damit die Vektoren $\mu_0(\overrightarrow{a_1}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\mu_0(\overrightarrow{a_2}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein minimales Erzeugendensystem.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Damit gilt: $\mu_0[\ \mathrm{R}^3\ ]$ ist eine Ebene ***E***, und zwar die Ebene $E:\ \vec{x} = \eta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \eta, \kappa \in \mathbb{R}$.		10	
e)	Zu lösen ist die Matrizengleichung $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Das zugehörige LGS liefert $y = -x \wedge z = -2x$. Damit gilt $h:\ \vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$. (Des Weiteren sei mit $\vec{h}$ der Richtungsvektor von h bezeichnet.)		15	
f)	Da weder $\mu_0(\overrightarrow{a_1})$ noch $\mu_0(\overrightarrow{a_2})$ Vielfache von $\vec{h}$ und zudem voneinander linear unabhängig sind, bilden diese drei Vektoren zusammen ein minimales Erzeugendensystem des R^3.	10		
g)	Hier gibt es mehrere mögliche Beweise. Einer sei angedeutet: Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die beiden Vektoren, durch die $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ zu einem minimalen Erzeugendensystem des R^3 ausgeweitet wird. Dann spannen ihre Bilder die Ebene ***E*** auf, da sie einerseits in der Ebene liegen, denn die Bilder der Vektoren sind die Projektionen auf die Ebene ***E***, und andererseits sind diese Projektionen nicht kollinear, da sonst die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zusammen mit $\vec{h}$ nur eine Ebene aufspannen würden, im Widerspruch zur Voraussetzung.			15
	Insgesamt 100 BWE	20	65	15

Aufgabe 10: Dreiecksmatrizen — Gy, GS

Aufgabenstellung

Die lineare Abbildung μ ist gegeben durch ihre Matrix $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, die eine Dreiecksmatrix ist.

a) Bestimmen Sie das Bild von $P\,(\,2 \mid 2 \mid 2\,)$ unter μ.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes Q, der durch μ auf P abgebildet wird.

c) Beweisen Sie: Für alle Punkte R in der x-y-Ebene gilt $\mu(R) = \mu^{-1}(R)$.

Bei einer quadratischen 3 x 3 - Matrix M heißt das Produkt der Elemente auf der Diagonalen die **Spur** der Matrix, also: $spur(M) = m_{11} \cdot m_{22} \cdot m_{33}$.

d) Zeigen Sie: Alle Dreiecksmatrizen, deren Spur nicht Null ist, sind invertierbar.

e) Betrachten Sie jetzt den Einheitswürfel, für den der Ursprung und der Punkt $E\,(\,1 \mid 1 \mid 1\,)$ gegenüberliegende Eckpunkte sind. Berechnen Sie das Volumen des Bildes dieses Einheitswürfels unter μ.

f) Beweisen Sie: Bei einer Dreiecksmatrix ist das Volumen des Bildes dieses Einheitswürfels die Spur der Matrix.

g) Verallgemeinern wir die Matrix M zu $M_a = \begin{pmatrix} -1 & m_{12} & m_{13} \\ 0 & 1 & m_{23} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(Die zugehörige Abbildung heißt dann μ_a.)
Bestimmen Sie Zahlen m_{12}, m_{13} und m_{23} so, dass die Bilder der Achsen senkrecht zueinander sind.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$\mu(P) = M \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. P wird also auf (8 | 0 | –2) abgebildet.	5		
b)	Die inverse Matrix zu M berechnet sich standardmäßig zu $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Da $\mu(Q) = P$, muss $Q = \mu^{-1}(P)$ sein. Also $\mu^{-1}(P) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Das Urbild von P ist der Punkt mit den Koordinaten (–8 | 0 | –2).	15	10	
c)	Zu zeigen ist: $M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. Ausrechnen ergibt, dass beide Terme gleich $\begin{pmatrix} -x+2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ sind. Also gilt die Aussage.	5	5	
d)	Die Antwort kann durch eine Verallgemeinerung des Vorgehens beim Invertieren von M gegeben werden oder auch durch ein Nachrechnen (zu $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ ergibt sich $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{ad} & \frac{be-cd}{adf} \\ 0 & \frac{1}{d} & \frac{-e}{df} \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{pmatrix}$, so lange a, d und f ungleich Null sind, ist diese Matrix definiert) .		15	
e)	Das Volumen des Bildes des Einheitswürfels ist das Spatprodukt der Bilder der Einheitsvektoren, also $V = \left\| \left(\mu(\vec{e_1}) \times \mu(\vec{e_2}) \right) \cdot \mu(\vec{e_3}) \right\|$. Dessen Wert bestimmt sich zu 1.		10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
f)	Dies ist die Verallgemeinerung von e): Sei $M=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix}$. Dann errechnet sich V mit der oben angegebenen Formel zu $V=m_{11}\cdot m_{22}\cdot m_{33}$.		10	10
g)	Die Spalten von M sind bekanntlich die Bilder der Einheitsvektoren. Also muss gelten: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} m_{12} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=0$. Dies ergibt $m_{12}=0$. Die zweimalige Anwendung des analogen Gedankens führt zu $m_{13}=m_{23}=0$. Lediglich diagonale Matrizen (unter den Dreiecksmatrizen) bilden also ein Orthogonalsystem auf ein Orthogonalsystem ab.		5	5 5
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

Aufgabe 11: Flugbahnen Gy, GS

Die Aufgabe entspricht mit kleinen Veränderungen einer Aufgabe in der EPA.

Aufgabenstellung

In einem Koordinatensystem beschreibt die x_1-x_2-Ebene eine flache Landschaft, in der sich ein Flughafen befindet. Die x_1-Achse weise in die Ostrichtung und die x_2-Achse in die Nordrichtung.
Unmittelbar nach dem Abheben von der Startbahn im Punkt P steigt das Flugzeug F_1 geradlinig auf.

Die Flugbahn von F_1 verläuft auf der Geraden $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -10{,}5 \\ -14 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 28 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Ein zweites Flugzeug F_2 bewegt sich entlang der Geraden $h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -7{,}2 \\ -9{,}6 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Längeneinheit ist 1 km.

a) Beschreiben Sie die Himmelsrichtungen, in welche die beiden Flugzeuge fliegen.
Das Flugzeug F_1 überfliegt in 6 km Höhe das Zentrum einer Stadt.
Berechnen Sie den Abstand des Stadtzentrums vom Abhebepunkt P.
Bestimmen Sie den Steigungswinkel der Flugbahn von F_1 .

b) Als das Flugzeug F_1 in einer Wolkendecke verschwindet, hat es vom Punkt P einen Abstand von 37 km. In welcher Höhe taucht F_1 in die Wolkendecke ein?
Zeigen Sie, dass die Flugzeuge F_1 und F_2 auf den angegebenen Bahnen nicht kollidieren können.
Berechnen Sie den Abstand der beiden Flugzeuge für den Fall, dass sich F_2 genau über F_1 befindet. Ist dieses der Abstand der beiden Flugbahnen?

c) Nahe der Startbahn befindet sich im Punkt $R\ (-10{,}2 \mid -13{,}6 \mid 0)$ eine Radarstation mit einem halbkugelförmigen Überwachungsbereich mit dem Radius 85 km.
Wie viele Kilometer fliegt das Flugzeug F_2 im Überwachungsbereich des Radars?
(Die Gleichung einer Kugel im dreidimensionalen Raum ist gegeben durch
$(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 + (x_3 - c)^2 = r^2$, wobei $(a \mid b \mid c)$ den Kugelmittelpunkt und r den Kugelradius bezeichnet.)

d) Die geradlinige Grenze zu einem Nachbarstaat verläuft durch die Punkte $G_1\ (84 \mid -3 \mid 0)$ und $G_2\ (12 \mid -99 \mid 0)$.
Wie weit hinter der Grenze kann ein im Nachbarland landendes Flugzeug von dem Radar noch erfasst werden?
Erläutern Sie Argumente, welche die errechnete Lösung in Frage stellen können.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Richtung von F_1 (über Grund): $\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$, zwischen NO und N; Richtung von F_2 (über Grund): $\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$, zwischen SO und O. Der Abhebepunkt liegt in $P\,(-10{,}5 \mid -14 \mid 0)$, das Zentrum der Stadt in $Z\,(0 \mid 0 \mid 0)$, denn $s = 0{,}5$ liefert $x_3 = 6$. Abstand $\left\vert\overline{PZ}\right\vert = 17{,}5$ km. Steigungswinkel für F_1: $\cos\varphi \approx 0{,}946$; $\varphi \approx 18{,}9°$.	7	10	
b)	Aus $37 = \lvert s \rvert \cdot \sqrt{21^2 + 28^2 + 12^2}$ folgt entsprechend der Aufgabenstellung $s = 1$; das Flugzeug taucht also in 12 km Höhe in die Wolken ein. F_2 bewegt sich parallel zur Erdoberfläche in der Ebene mit $x_3 = 12$. F_1 durchstößt diese Ebene im Punkt $T\,(10{,}5 \mid 14 \mid 12)$. T liegt nicht auf der Flugbahn von F_2, denn $-7{,}2+4t = 10{,}5$ liefert $t_0 = 4{,}425$, aber $-9{,}6 + t_0(-3) \neq 14$. F_1 befindet sich genau über F_2 , wenn $\left\vert\begin{matrix}-10{,}5+21\cdot s=-7{,}2+4\cdot t\\ -14+28\cdot s\quad=-9{,}6-3\cdot t\end{matrix}\right\vert$. Damit erhält man als Orte der Flugzeuge die Punkte $H_1\,(-7{,}2 \mid -9{,}6 \mid \approx 1{,}9)$ bzw. $H_2\,(-7{,}2 \mid -9{,}6 \mid 12)$. Die Flugzeuge befinden sich somit ca. 10,1 km übereinander. $\left\vert\overline{H_1H_2}\right\vert$ ist nicht der Abstand der Flugbahnen, da $\overline{H_1H_2}$ nicht senkrecht auf der Flugbahn von F_1 steht.	7	20	
c)	Schnittpunkte der Flugbahn mit der Kugel um R mit dem Radius 85 km: $\left\vert\begin{matrix}(x_1+10{,}2)^2+(x_2+13{,}6)^2+x_3^{\,2}=85^2\\ x_1=-7{,}2+4t\\ x_2=-9{,}6-3t\\ x_3=12\end{matrix}\right\vert$ Lösung: $t = \pm\,16{,}8$. F_2 fliegt zwischen den Punkten $S_1\,(-7{,}2 - 16{,}8\cdot 4 \mid -9{,}6 - 16{,}8\cdot(-3) \mid 12)$, also $S_1\,(-74{,}4 \mid 40{,}8 \mid 12)$, und $S_2\,(-7{,}2 + 16{,}8\cdot 4 \mid -9{,}6 + 16{,}8\cdot(-3) \mid 12)$, also $S_2\,(60 \mid -60 \mid 12)$, im Überwachungsbereich; seine Flugstrecke beträgt 168 km.	12	10	17

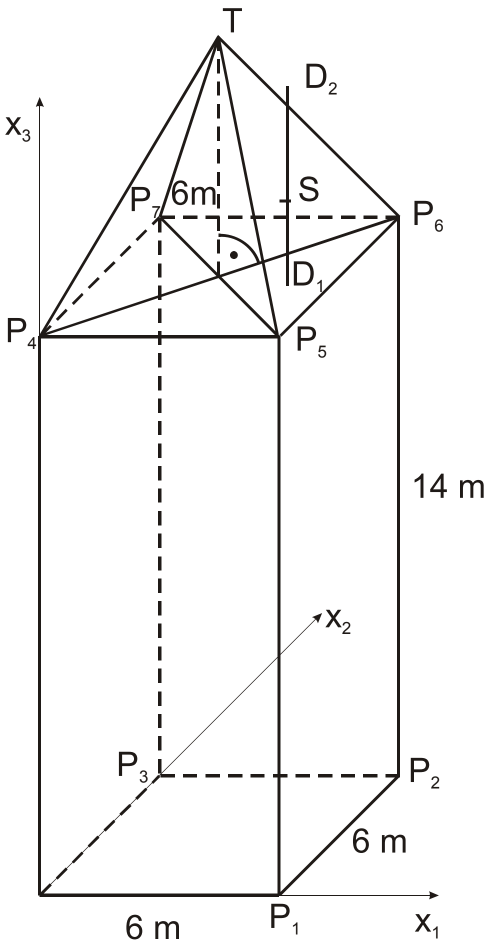
	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Gerade g_1: $\vec{x} = \vec{v} + r \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 84 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 72 \\ 96 \\ 0 \end{pmatrix}$. Abstand der Geraden G_1G_2 von R: $d = 69$. Ein im Nachbarland landendes Flugzeug kann hiernach noch 16 km hinter der Grenze vom Radar erfasst werden. Die berechnete Lösung berücksichtigt die Erdkrümmung nicht, die bei einer Entfernung von 85 km bereits zu mehr als 500 m Höhendifferenz führt (evtl. Rechnung z.B. über Satz des Pythagoras oder trigonometrisch oder analytisch). Damit wird ein landendes Flugzeug nicht mehr vom Radar erfasst.	3	7	7
	Insgesamt 100 BWE	29	47	24

Aufgabe 12: Burghotel **Gy, GS, TG**

Das Aufgabenbeispiel ist gekennzeichnet durch den zunehmenden Schwierigkeitsgrad. Im ersten Aufgabenteil werden umfangreiche Fertigkeiten aus dem Themenbereich Geraden- und Ebenengleichungen überprüft. Der zweite Aufgabenteil erfordert zusätzlich das Mathematisieren der beschriebenen Zusammenhänge und die Wahl der zur Bearbeitung geeigneten Verfahren. In Aufgabenteil drei ist zusätzlich die räumliche Vorstellungskraft der Abiturientinnen und Abiturienten gefragt. Aufgabenteil vier stellt eine Verbindung zwischen den Sachgebieten lineare Algebra/Analytische Geometrie und Analysis dar.

Aufgabenstellung

Der Turm einer zu einem Hotelkomplex gehörenden ehemaligen Burg hat die Form einer senkrechten quadratischen Säule, der eine Pyramide aufgesetzt ist (siehe Zeichnung). Drei Kanten des Turms liegen auf den Koordinatenachsen, der Burghof liegt in der horizontalen x_1x_2-Ebene.



a1) Bestimmen Sie den Winkel zwischen dem Dachboden $P_4P_5P_6P_7$ und der Dachfläche P_6P_7T.

a2) Die Dachfläche P_4P_5T soll vollständig mit Sonnenkollektoren zur Warmwassererzeugung bedeckt werden.
Berechnen Sie die Dachfläche P_4P_5T.

a3) Der Dachständer D_1D_2 mit der Länge 5m steht senkrecht auf dem Dachboden und durchstößt das Dach im Schwerpunkt der Dachfläche P_5P_6T.

a3.1 Der Schwerpunkt eines Dreiecks ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden. Beweisen Sie mit Hilfe von Vektoren, dass sich die Seitenhalbierenden in jedem Dreieck im Verhältnis der Schwerpunkt 2:1 teilen.

a3.2 Berechnen Sie, wie hoch die Spitze D_2 des Dachständers aus dem Dach herausragt.

b1) Im Punkt $F_1(20 \mid 3 \mid 0)$ des Burghofes steht ein 13 m hoher lotrechter Fahnenmast.
Von der Spitze F_2 dieses Fahnenmastes soll ein Seil zur Turmspitze T gespannt werden (Der Verlauf soll als geradlinig angenommen werden).
Zeigen Sie, dass der Dachständer aus Teilaufgabe a.3 diesem Seil nicht im Wege steht.

b2) Da man anlässlich der Eröffnung des Hotels an dem Seil Wimpel zur Dekoration anbringen will, die auch beim Flattern im Wind den Dachständer nicht berühren sollen, interessiert man sich für den Abstand des Punktes D_2 vom Seil.
Bestimmen Sie diesen Abstand.

c) Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ gibt die Richtung des einfallenden Sonnenlichtes an.

Zeigen Sie, dass der Schatten des Fahnenmastes F_1F_2 aus der Teilaufgabe b.1 eine Turmwand trifft. Berechnen Sie die gesamte Länge des Schattens.

d1) Im pyramidenförmigen Dachraum soll ein möglichst großer zylinderförmiger Wasserspeicher aufgestellt werden.
Bestimmen Sie Radius und Volumen des Wasserspeichers.

d2) Untersuchen Sie, ob zur Aufstellung des Wasserbehälters der Dachständer (siehe Teilaufgabe a3) entfernt werden muss.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	1. Aus der Zeichnung resultieren die Koordinaten der Eckpunkte des Turmes: $P_0(0 \mid 0 \mid 0)$, $P_1(6 \mid 0 \mid 0)$, $P_2(6 \mid 6 \mid 0)$, $P_3(0 \mid 6 \mid 0)$, $P_4(0 \mid 0 \mid 14)$, $P_5(6 \mid 0 \mid 14)$, $P_6(0 \mid 0 \mid 0)$, $P_1(6 \mid 6 \mid 14)$, $P_7(0 \mid 6 \mid 14)$, $T(3 \mid 3 \mid 20)$. Winkelberechnung: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert}$ $\quad 0 \le \alpha \le 180°$ $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}}{\lvert 9 \rvert \cdot \lvert 45 \rvert} = 0{,}447 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 63{,}435°$	10		
	2. Dachfläche: $A = \frac{1}{2}\left\lvert \overrightarrow{P_4P_5} \times \overrightarrow{P_4T} \right\rvert = \frac{1}{2}\left\lvert \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rvert = \frac{1}{2}\left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ 18 \end{pmatrix} \right\rvert = \frac{1}{2}\sqrt{36^2 + 18^2} = 20{,}125 m^2$	5		
	3. Schwerpunkt eines Dreiecks: Beweis über die lineare Unabhängigkeit der Seitenvektoren eines Dreiecks. Schwerpunkt des Dreiecks P_5P_6T: $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OP_5} + \overrightarrow{OP_6} + \overrightarrow{OT})$ $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 20 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S(5 \mid 3 \mid 16)$			20

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Da der Dachständer D_1D_2 parallel zur x_3-Achse verläuft und 5 m lang ist, können die Koordinaten von D_1 und D_2 aus den Koordinaten von S hergeleitet werden: $D_1(5 \mid 3 \mid 14)$; $D_2(5 \mid 3 \mid 19)$. Der Dachständer ragt folglich 3 m aus dem Dach heraus.		15	
b)	1. Für die Spitze des 13 m hohen lotgerechten Fahnenmastes im Punkt $F_1(20 \mid 3 \mid 13)$ gilt: Schnittbedingung für die Strecken $\overline{D_1D_2}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 0 \le s \le 5$ $\overline{F_LT}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -17 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad 0 \le t \le 1$ $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -17 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{15}{17}; \quad s = \frac{88}{17} \approx 5{,}18\,.$ Wegen $s > 5$ verläuft das Seil oberhalb des Dachständers.		10	
	2. Abstand des Punktes $D_2(5 \mid 3 \mid 19)$ vom Seil: Es ist $Q(20 - 17t \mid 3 \mid 13+17t)$ ein Punkt auf F_2T. Der Betrag des Vektors $\overrightarrow{D_2Q} = \begin{pmatrix} 20-17t-5 \\ 3-3 \\ 13+7t-19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-17t \\ 0 \\ -6+7t \end{pmatrix}$ ist gleich dem Abstand von D_2 zum Seil, wenn gilt: $\overrightarrow{D_2Q} \cdot \begin{pmatrix} -17 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 15-17t \\ 0 \\ -6+7t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -17 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$ $\Leftrightarrow \quad t = \frac{297}{338} \Rightarrow \left\lvert\overrightarrow{D_2Q}\right\rvert = \sqrt{\left(15 - 17 \cdot \frac{297}{338}\right)^2 + \left(-6 + 7 \cdot \frac{297}{338}\right)^2} = 0{,}163m\,.$		5	10
c)	Auf Grund der Lage des Fahnenmastes F_1F_2 kann nur die Turmwand von seinem Schatten getroffen werden, die in der Ebene $x_1 = 6$ liegt. Die Richtung des einfallenden Sonnenlichtes ist durch den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ gegeben.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>

Schnitt der Geraden durch F_2 in diese Richtung:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R} \qquad \text{mit der Ebene } P_1P_2P_6P_5:$$

$$\boldsymbol{E}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} k = 2 \\ l = 5 \\ m = 5 \end{matrix} \quad \Rightarrow \ \mathrm{F_2}` = S_p(6 \mid 5 \mid 5).$$

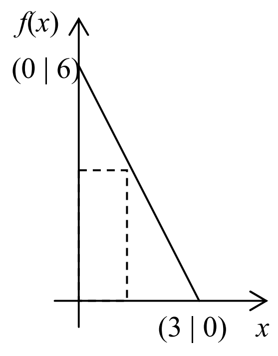
Der Punkt $S_p(6 \mid 5 \mid 5)$ liegt in der Turmwandfläche, da sein x_2-Wert zwischen 0 und 6, sein x_3-Wert zwischen 0 und 14 liegt.

Der Schatten des Fahnenmastes beginnt bei F_1, verläuft weiter geradlinig zum Fußpunkt $F_3(6 \mid 5 \mid 0)$ des Lotes von $F_2`$ auf die x_1x_2-Ebene und endet in F_2'.

$$l = \left|\overrightarrow{F_1F_3}\right| + \left|\overrightarrow{F_3F'_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} -14 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{200} + 5 = 5 + 10\sqrt{2} \approx 19{,}14m\,.$$

</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>

1. Skizze:



$$f(x) = -2x + 6$$
$$V_{\text{Zyl}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$V(x) = \pi \cdot x^2 \cdot (6 - 2x)$$
$$V(x) = -2\pi x^3 + 6\pi x^2)$$
$$V'(\mathrm{x}) = -6\pi x^2 + 12\pi x$$
$$V'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2;\ \ h = 2$$
$$V_{\max} = 25{,}133\ \mathrm{m}^3$$

2. Mit einem Radius von 2 m würde die Wand des Wasserspeichers genau auf den Dachständer treffen.

</td><td></td><td>10

5</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>15</td><td>55</td><td>30</td></tr>
</table>

Aufgabe 13: Lineare Algebra — WG

Die Aufgabe erfordert Kenntnisse aus dem Bereich Wirtschaftslehre. Diese Aufgabe kann nicht durch „rezeptartiges" Rechnen mit Vektoren und Matrizen gelöst werden, da in ihr inhaltliche Zusammenhänge erkannt werden müssen. Es müssen Strategien entwickelt werden und beim Lösen der LGS wird Durchhaltevermögen erwartet.

Im Aufgabenteil e) muss ein Problem mit Hilfe der Analysis gelöst werden.

Diese Aufgabe entspricht einer Aufgabe aus Baden-Württemberg, LK, Gruppe II, Aufgabe 1, Abitur 1996, leicht verändert.

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Die Schülerinnen und Schüler sind geübt im Umgang mit Vektoren, Matrizen und linearen Gleichungssystemen. Sie haben Kenntnisse über wirtschaftliche Modelle bei mehrstufigen Abläufen/Verfahren. Sie haben Extremwertprobleme gelöst, bei denen es um geometrische Beziehungen geht.

Aufgabenstellung

Ein Hersteller bietet Industriehallen aus normierten Betonstahlfertigteilen an. Zur Herstellung dieser Fertigteile benötigt er die Rohstoffe Kies (R_1), Zement (R_2), Stahl (R_3) und Wasser (R_4).

Aus diesen Rohstoffen werden folgende Zwischenprodukte hergestellt: Wandplatten (Z_1), Stützen (Z_2) und Träger (Z_3). Aus diesen können 3 Hallentypen H_1, H_2 und H_3 montiert werden.

Die folgende Tabelle gibt an, wie viele Tonnen der Rohstoffe zur Herstellung je einer Tonne der Zwischenprodukte benötigt werden.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	0,7	0,55	0,5
R_2	0,1	0,2	0,2
R_3	0,1	0,15	0,2
R_4	0,1	0,1	0,1

Die nächste Tabelle gibt an, wie viele Tonnen der jeweiligen Zwischenprodukte pro Hallentyp benötigt werden.

	H_1	H_2	H_3
Z_1	240	300	320
Z_2	80	120	280
Z_3	80	180	200

Die Kosten pro Tonne in GE für die jeweiligen Rohstoffe sind durch folgenden Kostenvektor gegeben:

$$\vec{k}_R = (27\,;\,190\,;\,600\,;\,3)^T$$

Die Fertigungskosten pro Tonne in GE für die jeweiligen Zwischenprodukte sind durch folgenden Vektor gegeben:

$$\vec{k}_Z = (80\,;\,100\,;\,120)^T$$

Die Endmontagekosten in GE je Hallentyp sind gegeben durch:

$$\vec{k}_H = (40.000\,;\,48.000\,;\,60.000)^T$$

a) Erstellen Sie die entsprechenden Matrizen und benennen Sie dieses eindeutig.
Berechnen Sie die Anzahl der Tonnen, die von den einzelnen Rohstoffen pro Hallentyp verarbeitet werden. Geben Sie konkret an, wie viele Tonnen vom Rohstoff 1 für Hallentyp 1 und vom Rohstoff 3 für Hallentyp 3 benötigt werden.

b) Bestimmen Sie, was jeweils eine fertig montierte Halle vom Typ H_1, H_2 und H_3 kostet.

c) Im Lager sind noch 1.712 Tonnen von R_1, 424 Tonnen von R_2 und 384 Tonnen von R_3, sowie ausreichend von R_4 vorrätig.
Berechnen Sie, wie viele Tonnen der einzelnen Zwischenprodukte mit diesen Lagerbeständen an Rohstoffen produziert werden können, wenn die Vorräte von R_1, R_2 und R_3 vollständig verarbeitet werden sollen.

d) Bestimmen Sie die Anzahl der Hallen, die sich aus diesen Zwischenproduktmengen (bezieht sich auf Aufgabenteil c)) montieren lassen.

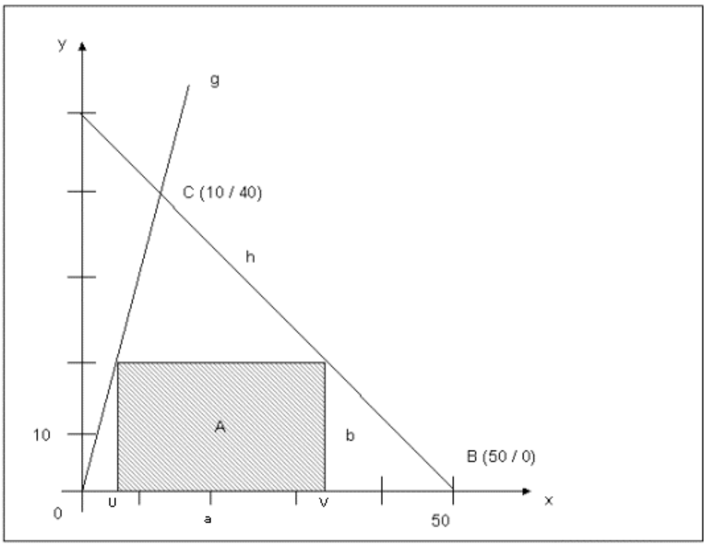
e) Ein dreieckiges Grundstück hat die Ecken 0(0 | 0), B(50 | 0) und C(10 | 40).
Auf diesem Grundstück soll eine Halle mit rechteckigem Grundriss erstellt werden. Dabei sollen zwei Ecken auf der Strecke $\overline{OB}$ und je eine Ecke auf der Strecke $\overline{BC}$ und $\overline{OC}$ liegen.
Fertigen Sie eine Skizze an.
Berechnen Sie die maximale Grundfläche einer Halle, die auf diesem Grundstück gebaut werden kann.
Geben Sie die Länge und Breite dieser Halle an.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$A_{RZ} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,55 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,15 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$ $B_{ZH} = \begin{pmatrix} 240 & 300 & 320 \\ 80 & 120 & 280 \\ 80 & 180 & 200 \end{pmatrix}$ Rohstoffmengen pro Hallentyp: $C_{RH} = A_{RZ} \cdot B_{ZH} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,55 & 0,5 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,15 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 240 & 300 & 320 \\ 80 & 120 & 280 \\ 80 & 180 & 200 \end{pmatrix} =$ Nebenrechnungen $= \begin{pmatrix} 252 & 366 & 478 \\ 56 & 90 & 128 \\ 52 & 84 & 114 \\ 40 & 60 & 80 \end{pmatrix}$ Für Hallentyp 1 werden 56 Tonnen von Rohstoff 2 (Zement), für Hallentyp 3 werden 114 Tonnen von Rohstoff 3 (Stahl) benötigt.	8	6	2

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
b)	Gesamtkosten = Rohstoffkosten + Fertigungskosten der Zwischenprodukte + Montagekosten Rohstoffkosten: $\vec{k}_R^T \cdot C_{RH} = (27\ ;\ 190\ ;\ 600\ ;\ 3) \cdot \begin{pmatrix} 252 & 366 & 478 \\ 56 & 90 & 128 \\ 52 & 84 & 114 \\ 40 & 60 & 80 \end{pmatrix}$ $= (48.764\ ;\ 77.562\ ;\ 105.866)$ Fertigungskosten der Zwischenprodukte: $\vec{k}_Z^T \cdot B_{ZH} = (80\ ;\ 100\ ;\ 120) \cdot \begin{pmatrix} 240 & 300 & 320 \\ 80 & 120 & 280 \\ 80 & 180 & 200 \end{pmatrix}$ $= (36.800\ ;\ 57.600\ ;\ 77.600)$ Endergebnis: $\vec{k}_{\text{ges}}^T = (125.564\ ;\ 183.162\ ;\ 243.466)$ Gesamtkosten in GE für (Halle 1 ; Halle 2 ; Halle 3)	7	8	3
c)	Die noch nicht bekannte Menge von Rohstoff 4, die benötigt wird, wird v_4 genannt. Damit ergibt sich folgender Vektor für den Vorrat an Rohstoffen: $\vec{v}_R = (1.712\ ;\ 424\ ;\ 384\ ;\ v_4)$. $\vec{y}_Z$ sei der Produktionsvektor der Zwischenprodukte und $\vec{x}_H$ sei der Produktionsvektor der Hallen. Lösungsansatz: $A_{RZ} \cdot \vec{y}_Z = \vec{v}_R$ Es ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, für das ein möglicher Lösungsweg skizziert wird: $\left(\begin{array}{ccc\|c} 0{,}7 & 0{,}55 & 0{,}5 & 1.712 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 424 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}2 & 384 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & v_4 \end{array}\right)$ $\sim \left(\begin{array}{ccc\|c} 7 & 5{,}5 & 5 & 17.120 \\ 1 & 2 & 2 & 4.240 \\ 1 & 1{,}5 & 2 & 3.840 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \cdot v_4 \end{array}\right)$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$\sim\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 1 & 1 & 10\cdot v_4 \\ 0 & 0{,}5 & 1 & 3.840-10\cdot v_4 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 400 \\ 0 & -1{,}5 & -2 & 17.120-70\cdot v_4 \end{array}\right)$ $\sim\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 1 & -800+10\cdot v_4 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 1 & 3.440-10\cdot v_4 \\ 0 & 0 & -2 & 18.320-70\cdot v_4 \end{array}\right)$ $\sim\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & -4.240+20\cdot v_4 \\ 0 & 1 & 0 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 3.440-10\cdot v_4 \\ 0 & 0 & 0 & 25.200-90\cdot v_4 \end{array}\right)$ Die LGS ist nur lösbar (vgl. letzte Zeile), wenn 0 = 25.200 – 90 · v4 $\Rightarrow$ v4 = 280. Setzt man diesen Wert in die Zeile 1 und Zeile 3 des LGS ein, erhält man $\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & 1.360 \\ 0 & 1 & 0 & 800 \\ 0 & 0 & 1 & 640 \end{array}\right).$ Ergebnis: $\vec{y}_Z$ = (1.360 ; 800 ; 640)T produzierbare Mengen an (Z_1 ; Z_2 ; Z_3) v_4 = 280.	5	16	3
d)	Ansatz: $A_{ZH}\cdot\vec{x}_H=\vec{y}_Z$ $\left(\begin{array}{ccc\|c} 240 & 300 & 320 & 1.360 \\ 80 & 120 & 280 & 800 \\ 80 & 180 & 200 & 640 \end{array}\right)$ $\sim\left(\begin{array}{ccc\|c} 80 & 120 & 280 & 800 \\ 0 & 60 & -80 & -160 \\ 0 & -60 & -520 & -1.040 \end{array}\right)$ $\sim\left(\begin{array}{ccc\|c} 80 & 120 & 280 & 800 \\ 0 & 60 & -80 & -160 \\ 0 & 0 & -600 & -1.200 \end{array}\right)$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$\sim\left(\begin{array}{ccc\|c} 80 & 120 & 280 & 800 \\ 0 & 60 & -80 & -160 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ $\sim\left(\begin{array}{ccc\|c} 80 & 120 & 0 & 240 \\ 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ $\sim\left(\begin{array}{ccc\|c} 80 & 0 & 0 & 240 \\ 0 & 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ $\sim\left(\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ Ergebnis: $\vec{x}_H = (3\ ;\ \ 0\ ;\ \ 2)^T$ Anzahl der Hallen (H_1; H_2; H_3).	7	5	4
e)	Gegeben: Dreieckiges Grundstück (O, B, C) Gesucht: Eine Halle mit möglichst großem Grundriss auf dem Grundstück  Bestimmung der Geraden g und h g: $y = 4\,x$ (Steigung ist mit Hilfe des Steigungsdreiecks direkt zu ermitteln, der y-Achsenabschnitt ist direkt ablesbar) h: $y = -x + 50$ (Steigung ist mit Hilfe von C und B über Steigungsdreieck zu ermitteln. $m = -1 \Rightarrow y = -x + b$, dann einen der Punkte einsetzen, seine Koordinaten müssen die gesuchte Gleichung erfüllen.....$\Rightarrow b = 50$)			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Ansatz $A = a \cdot b$ mit $a = v - u$ und $b = g(u)$ bzw. $b = h(v)$ Gleichsetzen: $g(u) = h(v)$ $4 \cdot u = -v + 50$ $v = -4u + 50$ Einsetzen in A: $A = a \cdot b = (v - u) \cdot 4u = (-4u + 50 - u) \cdot 4u$ $= 4u \cdot (50 - 5u)$ $= -20u^2 + 200u$ Zwischenergebnis: $A(u) = -20u^2 + 200u \quad u \in [0\,;10]$ $A'(u) = -40u + 200$ $A''(u) = -40$ Extrema $(A'(u_1) = 0$ und $A''(u_1) \neq 0)$ $-40u + 200 = 0 \quad \Rightarrow u_1 = 5$ $A''(5) = 500 > 0 \;\Rightarrow$ relatives Maximum bei $u_1 = 5$ $A(5) = 500$ (Grundfläche) $v = -4u + 50 = -20 + 50 = 30$ $a = v - u = 30 - 5 = 25$ (Grundseite, Länge) $b = 4u = 20$ (andere Seite, Breite)	3	15	8
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

Aufgabe 14: Lineare Algebra WG

Die Aufgabe erfordert Kenntnisse aus dem Bereich Wirtschaftslehre. Diese Aufgabe kann nicht durch „rezeptartiges“ Rechnen mit Vektoren und Matrizen gelöst werden, da in ihr inhaltliche Zusammenhänge erkannt werden müssen. Es müssen Strategien entwickelt werden und beim Lösen der LGS wird Durchhaltevermögen erwartet.

Im Aufgabenteil d) muss ein Problem mit Hilfe der Analysis gelöst werden (Maximum bestimmen).

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Die Schülerinnen und Schüler sind geübt im Umgang mit Vektoren, Matrizen und linearen Gleichungssystemen. Sie haben Kenntnisse über wirtschaftliche Modelle bei mehrstufigen Abläufen/Verfahren. Sie sind sicher im Berechnen von Maxima bei Funktionen.

Die Aufgabe wurde auf der Basis der Prüfungsaufgabe LK, II Lin. Alg., Aufgabe 1, 2001, Baden-Württemberg, erstellt.

Aufgabenstellung

Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 her und aus diesen die Endprodukte E_1, E_2 und E_3.

Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist folgenden Tabellen zu entnehmen.

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
R_1	a	b	0	0
R_2	0	c	d	0
R_3	0	0	e	0
R_4	0	0	f	g

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	0	0
Z_2	1	4	0
Z_3	0	3	1
Z_4	1	0	2

	E_1	E_2	E_3
R_1	5	12	0
R_2	2	11	1
R_3	0	12	4
R_4	2	3	5

a) Erstellen Sie die entsprechenden Matrizen und benennen Sie diese eindeutig.
Berechnen Sie die fehlenden Werte der Rohstoff-Zwischenprodukt-Tabelle.

b) Wegen eines bevorstehenden Umbaus soll das Rohstofflager weitgehend geräumt werden. Der Lagerbestand beträgt 1.000 ME von R_1, 720 ME von R_2, 960 ME von R_3 und 1.000 ME von R_4. Berechnen Sie die ME, die von jedem Endprodukt hergestellt werden können, wenn der Lagerbestand von R_2 und R_3 vollständig aufgebraucht werden soll und wenn von R_1 und R_4 gleich viel **übrig** bleiben soll.

c) Der Betrieb erhält einen Auftrag über 200 ME von E_1, 100 ME von E_2 und 300 ME von E_3.
Für diesen Auftrag betragen die Fixkosten 1.000 GE.
Die Rohstoffkosten in GE pro ME betragen: 1 für R_1, 3 für R_2, 4 für R_3 und 2 für R_4 .
Die Fertigungskosten in GE je ME eines Zwischenprodukts sind gegeben durch
$(2-x;\ 2-x;\ 4-x;\ 5-x)^T$, die eines Endproduktes durch $(3-x;\ 4-x;\ 5-x)^T$, dabei ist $0< x< 2$.
Berechnen Sie den Wert für x, für den die Gesamtkosten für diesen Auftrag 32.000 GE betragen.

d) Der Produktionsvektor der Endprodukte ist gegeben durch $(2t;\ t;\ 3t)^T$, da die Endprodukte aus produktionsspezifischen Gründen nur in einem bestimmten Verhältnis produziert werden können (mit $100< t < 1.200$).
Die Fixkosten betragen 4.000 GE, die variablen Herstellkosten je Endprodukt betragen
$(29 - 0{,}5\ln t;\ 130 - 2\ln t;\ 54 - 1{,}5\ln t)^T$. Die Verkaufspreise je Endprodukt sind gegeben durch
$(42 - 2\ln t;\ 145 - 4\ln t;\ 65 - 3\ln t)^T$.
Bestimmen Sie den Wert für t, für den der Gewinn $G(t)$ maximal wird, wenn die gesamte Produktion verkauft wird.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	$A_{RZ} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & g \end{pmatrix}$ $B_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $C_{RE} = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 0 \\ 2 & 11 & 1 \\ 0 & 12 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ Berechnung der Werte a, b, … g in A_{RZ} Wegen $A_{RZ} \cdot B_{ZE} = C_{RE}$ gilt $A_{RZ} \cdot B_{ZE} \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & 4b & 0 \\ c & 4c+3d & d \\ 0 & 3e & e \\ g & 3f & f+2g \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 5 & 12 & 0 \\ 2 & 11 & 1 \\ 0 & 12 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = C_{RE}.$ Durch elementweisen Vergleich erhält man die Gleichungen: $\begin{array}{rrr} 2a+b = 5 & 4b = 12 & \\ c = 2 & 4c+3d = 11 & d = 1 \\ & 3e = 12 & e = 4 \\ g = 2 & 3f = 3 & f+2g = 5 \end{array}$ mit der Lösung a = 1, b = 3, c = 2, d = 1, e = 4, f = 1, g = 2 erhält man die Matrix $A_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$	8	5	3
b)	Gegeben: Rohstoffvektor $\vec{r}_R^{\,T} = (1.000 - r;\ 720;\ 960;\ 1.000 - r)$ r = Rest Gesucht: Endproduktvektor $\vec{x}_E$ Lösung: Aus der Bedingung $C_{RE} \cdot \vec{x}_E = \vec{r}_R$ ergibt sich das LGS $\left(\begin{array}{ccc\|c} 5 & 12 & 0 & 1.000-r \\ 2 & 11 & 1 & 720 \\ 0 & 12 & 4 & 960 \\ 2 & 3 & 5 & 1.000-r \end{array}\right)$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 12 & 0 & 1.000-r \\ 0 & 31 & 5 & 1.600+2r \\ 0 & 3 & 1 & 240 \\ 0 & -8 & 4 & 280-r \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 12 & 0 & 1.000-r \\ 0 & 3 & 1 & 240 \\ 0 & 0 & 16 & 2.640-6r \\ 0 & 0 & 20 & 2.760-3r \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 12 & 0 & 1.000-r \\ 0 & 3 & 1 & 240 \\ 0 & 0 & 16 & 2.640-6r \\ 0 & 0 & 0 & -2.160+18r \end{array}\right).$$

Aus der letzten Gleichung $0 = -2.160 + 18r$ folgt $r = 120$ und damit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 12 & 0 & 880 \\ 0 & 3 & 1 & 240 \\ 0 & 0 & 16 & 1.920 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 12 & 0 & 880 \\ 0 & 3 & 1 & 240 \\ 0 & 0 & 1 & 120 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 12 & 0 & 880 \\ 0 & 3 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 1 & 120 \end{array}\right).$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 120 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{x}_E \begin{pmatrix} 80 \\ 40 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

Ergebnis: Der Produktionsvektor lautet $\vec{x}_E^T = (80; 40; 120)$.

Von R_1 bzw. R_4 bleiben jeweils 120 ME übrig.

	I	II	III
	8	12	5

c)

Gesucht: $\vec{k}_Z = \begin{pmatrix} 2-x \\ 2-x \\ 4-x \\ 5-x \end{pmatrix}$ Kostenvektor für die Fertigung der Zwischenprodukte

$\vec{k}_E = \begin{pmatrix} 3-x \\ 4-x \\ 5-x \end{pmatrix}$ Kostenvektor für die Fertigung der Endprodukte

Gegeben: $\vec{x}_E^T = (200; 100; 300)$ Endproduktvektor

$\vec{k}_R^T = (1; 3; 4; 2)$ Kostenvektor der Rohstoffe

$K_{fix} = 1.000$ fixe Kosten

$K_{ges} = 32.000$ gesamte Kosten

Lösung: Für die Gesamtkosten gilt

$K_{ges} = K_{fert,Z} + K_{fert,E} + K_{Roh} + K_{fix}$

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

wobei

$K_{\text{fert,Z}} = \vec{k}_Z^T \cdot B_{ZE} \cdot \vec{x}_E$

$K_{\text{fer,E}} = \vec{k}_E^T \cdot \vec{x}_E$

$K_{\text{Roh}} = \vec{k}_R^T \cdot C_{RE} \cdot \vec{x}_E$

Damit gilt für $K_{ges} = (\vec{k}_Z^T \cdot B_{ZE} + \vec{k}_E^T + \vec{k}_R^T \cdot C_{RE}) \cdot \vec{x}_E + K_{fix}$.

Nebenrechnungen

$$\vec{k}_Z^T \cdot B_{ZE} = (2-x\,;2-x\,;4-x\,;5-x) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (11 - 4x\ ;\ 20 - 7x;\ 14 - 3x)$$

$$\vec{k}_R^T \cdot C_{RE} = (1;3:4;2) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 12 & 0 \\ 2 & 11 & 1 \\ 0 & 12 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (15\ ;\ 99\ ;\ 29)$$

$$\vec{k}_Z^T \cdot B_{ZE} + \vec{k}_E^T + \vec{k}_R^T \cdot C_{RE} = (11 - 4x\ ;\ 20 - 7x\ ;\ 14 - 3x) + (3 - x\ ;\ 4 - x\ ;\ 5 - x) + (15\ ;\ 99\ ;\ 29)$$

$$= (29 - 5x\ ;\ 123 - 8x\ ;\ 48 - 4x)$$

$$(\vec{k}_Z^T \cdot B_{ZE} + \vec{k}_E^T + \vec{k}_R^T \cdot C_{RE}) \cdot \vec{x}_E = (29-5x\,;123-8x\,;48-4x) \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

$$= 32.500 - 3.000\,x$$

$K_{ges} = (\vec{k}_Z^T \cdot B_{ZE} + \vec{k}_E^T + \vec{k}_R^T \cdot C_{RE}) \cdot \vec{x}_E + K_{fix}$

$32.000 = 32.500 - 3.000x + 1.000$

$\Rightarrow \quad x = 0,5$

Ergebnis: Für $x = 0,5$ ist $K_{ges} = 32.000$.

I	II	III
7	13	9

d) Gewinnmaximierung

Gegeben: $\vec{x}_E = t \cdot (2;1;3)^T$ Endproduktvektor

$\vec{k}_E = \begin{pmatrix} 29 - 0,5 \cdot \ln t \\ 130 - 2 \cdot \ln t \\ 54 - 1,5 \cdot \ln t \end{pmatrix}$ Kostenvektor für die Herstellung der Endprodukte

$K_{\text{fix}} = 4.000$ fixe Kosten

$\vec{P}_E = \begin{pmatrix} 42 - 2 \cdot \ln t \\ 145 - 4 \cdot \ln t \\ 65 - 3 \cdot \ln t \end{pmatrix}$ Preisvektor für die Endprodukte

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Gesucht: $100 \le t \le 1.200$, so dass der Gewinn $G(t)$ maximal wird Lösung: Gewinn = Erlös – Kosten $G(t) = E(t) \quad - K(t)$ mit $E(t) = \vec{p}_E^{\,T} \cdot \vec{x}_E$ $= (42 - 2\ln t\,;\, 145 - 4\ln t\,;\, 65 - 3\ln t)\; t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ $= t \cdot (424 - 17\ln t)$ $K(t) = \vec{k}_E^{\,T} \cdot \vec{x}_E + K_{fix}$ $= \left(29 - \frac{1}{2}\ln t\,;\,130 - 2\ln t\,;\,54 - \frac{3}{2}\ln t\right) \cdot t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + 4.000$ $= t \cdot (350 - 7{,}5 \cdot \ln t) + 4.000$ $\Rightarrow G(t) = t \cdot (74 - 9{,}5 \cdot \ln t) - 4.000$ $G'(t) = 1 \cdot (74 - 9{,}5 \cdot \ln t) + t \cdot \left(-9{,}5 \cdot \frac{1}{t}\right)$ $= 64{,}5 - 9{,}5 \cdot \ln t$ $G''(t) = -\frac{9{,}5}{t}$ Extremum ($G'(t_1) = 0$; $G''(t_1) \neq 0$) $0 = 64{,}5 - 9{,}5 \cdot \ln t_1$ $t_1 = e^{\frac{64{,}5}{9{,}5}} = 888{,}445835... \approx 888{,}45 \quad t \in \mathbb{D}$ $G''(t_1) = -\frac{9{,}5}{t_1} < 0$ $H = (888{,}45 \mid 4.440{,}24)$ $G(t_1) = 4.440{,}235...$	8	13	9
	Insgesamt 100 BWE	31	43	26

Aufgabe 15: Leontief – Modell WG

In dieser Aufgabe geht es um die Modellierung der Beziehungen von Zweigwerken mit dem Markt mit Hilfe des Leontief – Modells. Im Aufgabenteil e) muss ein Problem mit Hilfe der Analysis gelöst werden (Maximum bestimmen).

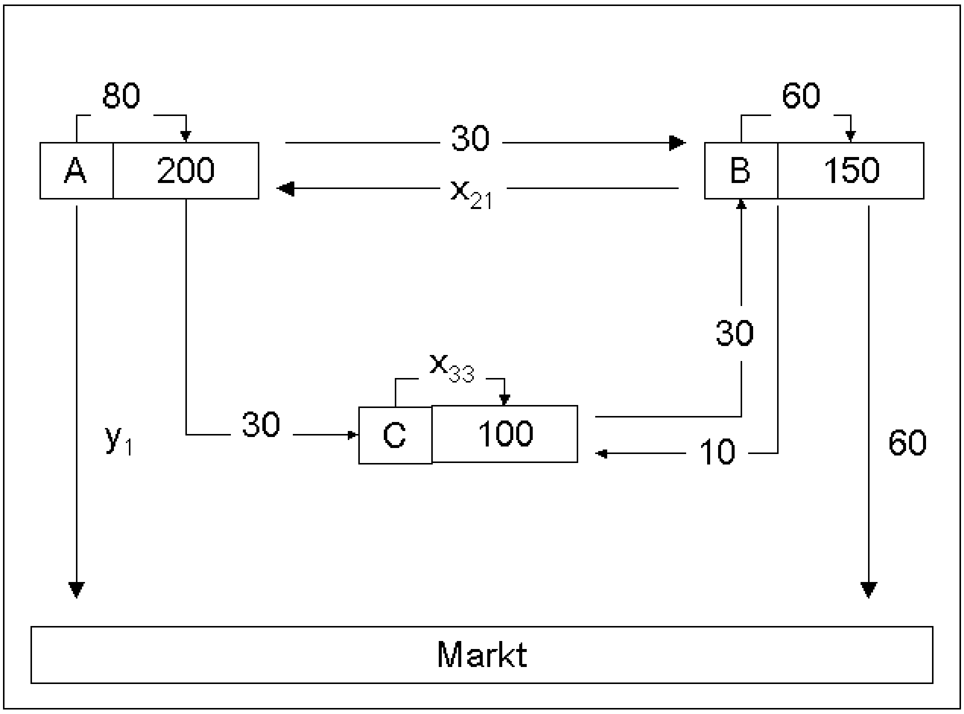
Diese Aufgabe entspricht der Aufgabe 1, Gruppe II, Abiturprüfung 1995 in Baden – Württemberg, sie wurde teilweise umformuliert.

Unterrichtliche Voraussetzungen:
Die Schülerinnen und Schüler sind sicher im Umgang mit Matrizen, Vektoren und Linearen Gleichungssystemen. Sie haben Kenntnisse in Wirtschaftslehre. Sie kennen das Leontief – Modell. Sie können Extrema bestimmen.

Aufgabenstellung

Drei Zweigwerke A, B und C sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief – Modell verflochten.

Das Diagramm stellt die Verflechtungen dar, die Angaben erfolgen in Mengeneinheiten (ME).



a) Erstellen Sie die Inputmatrix.

b) In einem früheren Zeitraum betrug der Marktvektor $\vec{y} = (41\ /\ 42\ /\ 5)^T$.
Bestimmen Sie den zugehörigen Produktionsvektor $\vec{x}$ und stellen Sie die Verflechtung in einer Tabelle dar.

c) In der Urlaubszeit wollen Zweigwerk A 20 ME und C 30 ME produzieren.
Das Zweigwerk A erzielt für sein Produkt auf dem Markt einen Erlös von 1.000 GE pro ME, B erzielt 600 GE pro ME und C 400 GE pro ME.
In den Zweigwerken A, B und C betragen die Herstellungskosten je ME 100 GE, 80 GE bzw. 40 GE. Zeigen Sie, dass der Gewinn des Unternehmens von der Produktionsmenge des Zweigwerks B unabhängig ist.

d) Bestimmen Sie alle ganzzahligen Produktionsmengen, die für B möglich sind, wenn alle Marktabgaben nicht negativ sein dürfen.
Ermitteln Sie nun, welche dieser ganzzahligen Produktionszahlen für B realisierbar sind, wenn auch die Marktabgabe nur in ganzzahligen, nicht negativen ME erfolgen kann.

e) Nach einer Umstellung des Produktionsverfahrens ist eine neue Inputmatrix A_t gegeben durch

$$A_t = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 2-0{,}004t^2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}02(t-8) & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist t ein technologieabhängiger Parameter mit $16 \le t \le 22$.
Es ist die Produktion $\vec{x}_t = (\,40t \mid 10t \mid 12t)^T$ geplant.
Bestimmen Sie den Wert t, für den die Summe der Marktabgaben aller drei Zweigwerke am größten ist.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

a) Gesucht: die Inputmatrix A

	A	B	C	Markt y	Produktion x	
A	80	30	30	y_1	200	$\Rightarrow$ y_1 = 60
B	x_{21}	60	10	60	150	$\Rightarrow$ x_{21} = 20
C	0	30	x_{33}	0	100	$\Rightarrow$ x_{33} = 70

$$X = \begin{pmatrix} 80 & 30 & 30 \\ 20 & 60 & 10 \\ 0 & 30 & 70 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \text{ mit } a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$$

$$\vec{x}^T = (200 \;\; 150 \;\; 100)$$

	I	II	III
a)	3	8	2

b) Gesucht: Produktion $\vec{x}$ und Verflechtungstabelle

$$\vec{x} = A\cdot\vec{x} + \vec{y}$$
$$\vec{x} - A\vec{x} = \vec{y}$$
$$E\vec{x} - A\vec{x} = \vec{y}$$
$$(E-A)\vec{x} = \vec{y}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}6 & -0{,}2 & -0{,}3 & 41 \\ -0{,}1 & 0{,}6 & -0{,}1 & 42 \\ 0 & -0{,}2 & 0{,}3 & 5 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & 1 & -420 \\ 0 & 34 & -9 & 2.930 \\ 0 & -2 & 3 & 50 \end{array}\right)$$

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -6 & 1 & -420 \\ 0 & -2 & 3 & 50 \\ 0 & 0 & 42 & 3.780 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -6 & 1 & -420 \\ 0 & -2 & 3 & 50 \\ 0 & 0 & 1 & 90 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -6 & 0 & -510 \\ 0 & -2 & 0 & -220 \\ 0 & 0 & 1 & 90 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 110 \\ 0 & 0 & 1 & 90 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 150 \\ 110 \\ 90 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 60 & 22 & 27 \\ 15 & 44 & 9 \\ 0 & 22 & 63 \end{pmatrix} \text{ mit } x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$$

$\vec{x}^{\,T} = (150\ 110\ \ 90)$

Verflechtungstabelle:

	A	B	C	Markt y	Produktion x
A	60	22	27	41	150
B	15	44	9	42	110
0	0	22	63	5	90

Bewertung: I: 8 | II: 10 | III: 6

c) Gesucht: Gewinn, Produktionsmenge für B

Marktabgabe $\vec{y}$, wenn $\vec{x}^{\,T} = (20\ ;\ x_2;\ 30)$

$$(E-A)\cdot\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,2 & -0,3 \\ -0,1 & 0,6 & -0,1 \\ 0 & -0,2 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ x_2 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 0,2x_2 \\ -5 + 0,6x_2 \\ 9 - 0,2x_2 \end{pmatrix} = \vec{y}$$

Erlös E, wenn $\vec{p}^{\,T} = (1.000\ ;\ 600\ ;\ 400)$

$$E = \vec{p}^{\,T} \cdot \vec{y} = 100\,(10\ ;\ 6\ ;\ 4) \begin{pmatrix} 3 - 0,2x_2 \\ -5 + 0,6x_2 \\ 9 - 0,2x_2 \end{pmatrix}$$

$$= 100 \cdot (30 - 2x_2 - 30 + 3,6x_2 + 36 - 0,8x_2)$$

$$= 3.600 + 80x_2$$

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III

Kosten K, wenn $\vec{k}^T = (100\,;\,80\,;\,40)$

$$K = \vec{k}^T \cdot \vec{x} = (100\,;\,80\,;\,40) \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ x_2 \\ 30 \end{pmatrix} = 3.200 + 80x_2$$

Gewinn G

$G = E - K = 3.600 + 80x_2 - (3.200 + 80x_2) = 400$

Der Gewinn $G = 400$ ist konstant, also unabhängig von x_2.

I	II	III
7	9	8

d) Gesucht: Produktionsmenge x_2, wenn $\vec{y} \geq 0$

$$\text{Es ist (s.o.) } \vec{y} = \begin{pmatrix} 3-0{,}2x_2 \\ -5+0{,}6x_2 \\ 9-0{,}2x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \Rightarrow 3 \geq 0{,}2x_2 \Rightarrow \quad x_2 \leq 15 \\ \Rightarrow 5 \geq 0{,}6x_2 \Rightarrow \; 8{,}3 \leq x_2 \\ \Rightarrow 9 \geq 0{,}2x_2 \Rightarrow \quad x_2 \leq 45 \end{array}$$

$X_2 \in (9\,;\,10\,;\,11\,;\,12\,;\,13\,;\,14\,;\,15) = \mathbb{L}$

- Gesucht: $x_2 \in \mathbb{L}$,

$$\text{wenn } \vec{y} \geq 0 \text{ und } \vec{y} = \begin{pmatrix} 3-0{,}2x_2 \\ -5+0{,}6x_2 \\ 9-0{,}2x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ganzzahlig}$$

x_2	y_1	y_2	y_3	x_2 ist zulässig?
9	1,2	0,4	7,2	nein
10	1	1	7	ja
11	0,8	1,6	6,8	nein
12	0,6	2,2	6,6	nein
13	0,4	2,8	6,4	nein
14	0,2	3,4	6,2	nein
15	0	4	6	ja

I	II	III
6	7	3

e) Gesucht: t so, dass $y_1 + y_2 + y_3$ maximal, wenn $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$

$$\vec{y} = (E - A) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -2+0{,}004t^2 & -0{,}3 \\ -0{,}1 & 0{,}6 & -0{,}1 \\ 0 & 0{,}16-0{,}02t & 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot t \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$= t \cdot \begin{pmatrix} 24-20+0{,}04t^2-3{,}6 \\ -4+6-1{,}2 \\ 1{,}6-0{,}2t+3{,}6 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}4+0{,}04t^2 \\ 0{,}8 \\ 5{,}2-0{,}2t \end{pmatrix}$$

f: $f(t) = y_1 + y_2 + y_3$

$\quad = t(0{,}04t^2 - 0{,}2t + 6{,}4)$

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$f(t) = 0{,}04t^3 - 0{,}2t^2 + 6{,}4t$; $t \in [16 ; 22]$ $f'(t) = 0{,}12t^2 - 0{,}4t + 6{,}4$ $= 0{,}12\left(t^2 - \frac{10}{3}t + \frac{160}{3}\right) = 0$ $t_{1,2} = \frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9} - \frac{160}{3}} \notin \mathbb{R}$, also kein relatives Maximum Ränder: $f(16) = 215{,}04$ absolutes Maximum bei $t = 22$ $f(22) = 469{,}92$	7	11	5
	Insgesamt 100 BWE	31	45	24

Aufgabe 16: Geraden- und Ebenenscharen ´Gy, GS, TG, WG

Aufgabenstellung

Gegeben sind im Raum R^3 die folgenden Geraden- und Ebenengleichungen mit $k \in \mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{E}: \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 3 = 0 \quad ;$$

$$g_k: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2+k \\ 1 \\ 1+k \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ k \end{pmatrix} \quad ;$$

$$\boldsymbol{E}_k: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} + b_1 \cdot \begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ k \end{pmatrix} + b_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad .$$

a) Berechnen Sie den Repräsentanten aller Schnittpunkte der Geradenschar g_k mit der Ebene $\boldsymbol{E}$.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g_1 aus der Geradenschar, die parallel zur Ebene $\boldsymbol{E}$ verläuft.

c) Untersuchen Sie, ob die Gerade g_1 in der Ebene $\boldsymbol{E}$ liegt.

d) Eine zweite Gerade g_2 der Geradenschar durchstößt die Ebene $\boldsymbol{E}$ rechtwinklig. Bestimmen Sie deren Gleichung.

e) Ermitteln Sie die Gleichung aller Schnittgeraden der Ebene $\boldsymbol{E}$ mit den Ebenen der Schar $\boldsymbol{E}_k$.

f) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebenenschar $\boldsymbol{E}_k$ in der Punkt-Normalenform.

g) Ermitteln Sie die k-Werte, deren zugehörige Ebenen aus der Schar $\boldsymbol{E}_k$ die Ebene $\boldsymbol{E}$ unter einem Winkel von 60^0 schneiden.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die Ortsvektoren $\vec{o}_S$ der Schnittpunkte müssen sowohl die Ebenen- als auch die Geradengleichung erfüllen. Also: Term von g_k in E einsetzen. $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}2+k\\1\\1+k\end{pmatrix}+a\cdot\begin{pmatrix}1+k\\1-k\\k\end{pmatrix}\right]-3=0$ $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2+k+a+ak\\1+a-ak\\1+k+ak\end{pmatrix}-3=0$ $4+2k+2a+2ak+1+k+ak-3=0$ $3k+3ak+2a+2=0$ $a(3k+2)=-3k-2$ $a=\frac{-3k-2}{3k+2}=-1 \quad \text{mit } k\neq-\frac{2}{3}$ $\Rightarrow a_S=-1$ Einsetzen in $\boldsymbol{g_k}$: $\vec{o}_S=\begin{pmatrix}2+k\\1\\1+k\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}1+k\\1-k\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ **S(1 | *k* | 1)** mit $k\neq-\frac{2}{3}$.	5	10	
b)	$\boldsymbol{g_k} \parallel \boldsymbol{E} \Leftrightarrow$ Richtungsvektor von $\boldsymbol{g_k}$ muss rechtwinklig auf dem Normalenvektor von $\boldsymbol{E}$ stehen. $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+k\\1-k\\k\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 2+2k+k=0 \Leftrightarrow k=-\frac{2}{3}$ Einsetzen in $\mathbf{g}_k$: $g_1\!: \ \vec{x}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}+a\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{5}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$	5	5	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	$\boldsymbol{g}_1$ liegt in $\boldsymbol{E}$, wenn der Ortsvektor $\vec{x}$ der Geraden auf $\boldsymbol{E}$ endet. $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3}+\frac{1}{3}-3 = 0$ Die Gleichung ist erfüllt und es gilt: $\boldsymbol{g}_1$ liegt in $\boldsymbol{E}$.		5	
d)	$\boldsymbol{g}_k \perp \boldsymbol{E} \Leftrightarrow$ Richtungsvektor von $\boldsymbol{g}_k$ muss parallel zum Normalenvektor von $\boldsymbol{E}$ verlaufen. Also: $\vec{r}_{\mathrm{gk}} = a \bullet \vec{r}_{\mathrm{E}} \wedge a \neq 0$ $\begin{pmatrix}1+k\\1-k\\k\end{pmatrix} = \mathrm{a}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l}\mathrm{I:}\ 1+k=2a\\ \mathrm{II:}\ 1-k=0\\ \mathrm{III:}\ k=a\end{array} \Leftrightarrow k = 1$ $k = 1$ in III und I eingesetzt ergibt: $a = 1$ $\Rightarrow \vec{r}_{\mathrm{gk}} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{o}_{\mathrm{gk}} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ $\mathbf{g}_2$: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + \mathrm{a}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$	5	10	
e)	Die Ortsvektoren aller Punkte auf der Schnittgeraden müssen auf beiden Ebenen enden. Also: $\vec{x}$ von $\mathbf{E}_k$ in $\mathbf{E}$. $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1\\k\\1\end{pmatrix}+b_1\cdot\begin{pmatrix}1+k\\1-k\\k\end{pmatrix}+b_2\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right] - 3 = 0$ $2 + 2b_1 + 2\,b_1k + 2b_2 + 1 + b_1k + 2b_2 - 3 = 0$ $2b_1 + 3b_1k + 4b_2 = 0$ $4b_2 = -2b_1 - 3b_1k)$ $b_2 = -\frac{1}{4}b_1\,(2 + 3k)$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

Einsetzen in $\mathbf{E}_k$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} + b_1 \cdot \begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ k \end{pmatrix} + -\frac{1}{4} b_1 \,(2+3k) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} + b_1 \cdot \begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ k \end{pmatrix} + b_1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}k \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}k \\ -1 - \frac{3}{2}k \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} + b_1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}k \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{4}k \\ -1 - \frac{1}{2}k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ \mathbf{g_S}: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} + b_1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}k \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{4}k \\ -1 - \frac{1}{2}k \end{pmatrix}$$

I	II	III
	15	5

f) Gesucht ist der Normalenvektor $\vec{n}$, der rechtwinklig auf beiden Richtungsvektoren der Ebenenschar $\boldsymbol{E}_k$ steht.

Es sei $\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

I. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \\ k \end{pmatrix} = 0$ und II. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

I. $x + kx + y - ky + kz = 0$

II. $x - y + 2z = 0$

Da die Richtung des Normalenvektors allein durch das Verhältnis seiner Komponenten festgelegt wird, kann ein Wert beliebig festgesetzt werden, z.B. $x = 1$.

I. $1 + k + y - k\mathrm{y} + kz = 0$

II. $1 - y + 2z = 0$

II. $y = 2z + 1$

Einsetzen von y in I:

$$1 + k + 2z + 1 - k(2\mathrm{z} + 1) + k\mathrm{z} = 0$$

$$2 + 2z - kz = 0$$

$$z(2-k) = -2$$

$$z = \frac{-2}{2-k} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{2}{k-2}$$

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
	Einsetzen von z in II: $y = 1 + 2\,\frac{2}{k-2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{k+2}{k-2} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{k+2}{k-2} \\ \frac{2}{k-2} \end{pmatrix}$ Da die Länge des Normalenvektors beliebig ist, kann er mit dem Faktor $(k-2)$ multipliziert werden. Also: $\vec{n} = \begin{pmatrix} k-2 \\ k+2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \quad \mathbf{E}_k\!: \begin{pmatrix} k-2 \\ k+2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - \begin{pmatrix} k-2 \\ k+2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ $\mathbf{E}_k\!: \begin{pmatrix} k-2 \\ k+2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - (k^2 + 3k) = 0$		20	5
g)	$\frac{\begin{pmatrix} k-2 \\ k+2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(k-2)^2 + (k+2)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}} = \cos 60^0$ $\frac{2k - 4 + 2}{\sqrt{k^2 - 4k + 4 + k^2 + 4k + 4 + 4} \cdot \sqrt{5}} = \cos 60^0$ $\frac{2k-2}{\sqrt{10k^2 + 60}} = 0{,}5$ $2k - 2 = 0{,}5 \cdot \sqrt{10k^2 + 60}$ $4k^2 - 8k + 4 = 0{,}25 \cdot (10k^2 + 60)$ $4k^2 - 8k + 4 = 2{,}5k^2 + 15$ $1{,}5k^2 - 8k - 11 = 0$ $k^2 - \frac{16}{3}k - \frac{22}{3} = 0$ $k_{1,2} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} + \frac{66}{9}} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{130}{9}}$ $k_1 \approx 6{,}48 \;;\; k_2 \approx -1{,}13$		5	5
	Insgesamt 100 BWE	15	70	15

4.2.3 Stochastik

Aufgabe 1: Amoral **Gy, GS, TG, WG**

Aufgabenstellung

Laut Angabe des Arzneimittelherstellers treten nach der Einnahme von „Amoral“ in 6% aller Fälle unerwünschte Nebenwirkungen auf.

a) Unter welchen Umständen ist es sinnvoll, die Anzahl X der Patienten, bei denen Nebenwirkungen auftreten, als binomialverteilt anzunehmen?

Beschreiben Sie Situationen, in denen die Voraussetzungen für eine Binomialverteilung nicht erfüllt sind.

Im Folgenden soll angenommen werden, dass die in a) genannte Zufallsgröße X tatsächlich binomialverteilt ist.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 50 Patienten höchstens bei einem diese Nebenwirkungen auftreten.

In einer Gruppe von zufällig ausgewählten Patienten behaupten alle, dass bei ihnen keinerlei Nebenwirkungen aufgetreten seien.

c) Bei welcher Gruppengröße sinkt die Wahrscheinlichkeit, dass wirklich keiner an Nebenwirkungen leidet, unter 1%?

In einer internistischen Gemeinschaftspraxis wollen die Ärzte Fälle mit Nebenwirkungen genauer beobachten. Sie rechnen damit, dass sie innerhalb eines halben Jahres 200 Patienten „Amoral“ verschreiben werden und gehen davon aus, dass das Medikament dann auch eingenommen wird.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei mindestens 10 Patienten Nebenwirkungen auftreten werden?

Ein anderer Hersteller bringt ein Medikament mit der gleichen Wirksamkeit auf den Markt, das nicht nur preiswerter ist, sondern zudem nach seinen Angaben besser verträglich: Nur in höchstens 4 % aller Fälle sollen Nebenwirkungen auftreten.

e) Im Zuge der Bemühungen um Kostensenkungen muss entschieden werden, ob Ärzten empfohlen werden soll, nicht mehr „Amoral“, sondern das neue Medikament zu verschreiben. Vorher soll das neue Medikament an 500 Patienten getestet werden.

Geben Sie eine ausführlich begründete Entscheidungshilfe: Bei bis zu wie vielen Fällen von Nebenwirkungen in dieser Gruppe soll das neue Medikament empfohlen werden?

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Es werden nur zwei Ergebnisse unterschieden; geht man davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Nebenwirkungen auftreten, im Prinzip bei jedem Patienten $p = 0{,}06$ beträgt, so muss noch darauf geachtet werden, dass die Unabhängigkeit der Ereignisse gewährleistet ist. Jammert jemand z.B. den anderen vor, wie schlecht es ihm geht, horchen u.U. diese sehr aufmerksam in sich hinein, bis auch sie sich unwohl fühlen. Umgekehrt kann eine Frohnatur die anderen von ihren Beschwerden ablenken. Doch auch Wechselwirkungen mit anderen Medikamenten und „gemeinsame“ Gebrechen können stochastische Abhängigkeiten verursachen. Es wird eine „ergebnisoffene“ zusammenhängende Darstellung erwartet.		15	
b)	$P(X\leq 1) = 0{,}94^{50} + \binom{50}{1}\cdot 0{,}06\cdot 0{,}94^{49} \approx 0{,}190$	10		
c)	Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n, für die gilt: $0{,}94^n < 0{,}01$. Aufgelöst nach n ergibt sich $n > \frac{\lg 0{,}01}{\lg 0{,}94}$, also $n = 75$.		15	
d)	Aus $n = 200$ und $p = 0{,}06$ folgt: $\sigma = \sqrt{200\cdot 0{,}06\cdot 0{,}94} = \sqrt{11{,}28} > 3$. Also kann die Binomial- durch die Normalverteilung approximiert und die integrale Näherungsformel angewendet werden. Mit Hilfe der Tafel für die Gaußsche Integralfunktion erhält man mit Interpolation $P(X \geq 10) = 1 - P(X\leq 9)$ $\approx 1-\Phi\left(\frac{9{,}5-\mu}{\sigma}\right) = 1-\Phi\left(\frac{9{,}5-12}{\sqrt{11{,}28}}\right) \approx 1-\Phi(-0{,}744)$ $\approx 1 - 0{,}2284 = 0{,}7716 \approx 0{,}772.$	10	15	
e)	Diese Aufgabenstellung ist sehr offen gestellt, daher sind unterschiedliche Antworten denkbar und sinnvoll: Zu überlegen ist zunächst, welchen Stellenwert die Kostenersparnis haben soll. Steht diese im Vordergrund und wird die bessere Verträglichkeit nicht so wichtig genommen, könnte man das neue Medikament empfehlen, sofern das Stichprobenergebnis nicht nach oben signifikant von $p = 0{,}06$ abweicht. Hier müsste auch über das Signifikanzniveau nachgedacht werden. Wir wählen hier einen „üblichen“ Wert von 5%: Man wird sich dann bei der genannten Interessenlage nur dagegen absichern, dass das neue Medikament nicht schlechter als das alte ist und würde H_1: $p > 6\%$ gegen $H_0: p \leq 6\%$ testen und käme zu dem Ergebnis, das neue Medikament abzulehnen, wenn mehr als 39 Patienten mit Nebenwirkungen auftreten.			

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
Möchte man in erster Linie sicher sein, dass das neue Medikament wirklich besser verträglich ist, so wird man anders vorgehen und die Frage, ob das neue Medikament die Nebenwirkungsquote tatsächlich gesenkt hat durch einen einseitigen Hypothesentest untersuchen:

$$H_1: p < 6\% \text{ gegen } H_0: p \geq 6\% .$$

Das führt bei 5% Signifikanzniveau auf einen Ablehnungsbereich: $X \leq 21$. Erst bei weniger als 22 Patienten mit Nebenwirkungen würde man dann das neue Medikament empfehlen. Man könnte auch noch strenger sein und H_1 ersetzen durch H_1: $p < 4\%$. Das würde dazu führen, dass man das Medikament erst empfiehlt bei weniger als 13 Patienten mit Nebenwirkungen. Mit dieser strengen Entscheidungsregel für das neue Medikament kann man ziemlich sicher sein, dass das neue Medikament nur eingeführt wird, wenn es wirklich deutlich besser ist.

Ein methodisch ganz anderes Vorgehen verwendet die Möglichkeit der Approximation der Verteilung von X durch die passende Normalverteilung und zieht das um den Erwartungswert symmetrische 95% Intervall heran:

$$\mu = n \cdot p = 30,\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{28,2},\ \mu + 1,96\sigma \approx 40,4 .$$

Bei bis zu 40 Fällen von Nebenwirkungen wird danach das neue Medikament empfohlen.

Wenn die behauptete Senkung der Nebenwirkungen auf 4 % ausschlaggebend sein soll, so wird man $p = 0,04$ zugrunde legen:

$$\mu = n \cdot p = 20,\ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{19,2},\ \mu + 1,96\sigma \approx 28,6 .$$

Nur bis zu 28 Fällen von Nebenwirkungen wird dann das neue Medikament empfohlen. Zu bedenken ist auch, dass mit dieser Entscheidungsregel die Wahrscheinlichkeit verringert wird, dass das neue Medikament zu Unrecht eingeführt wird. Je nachdem, wie hoch die Kosten für die Behandlung der Nebenwirkungen sind, kann durchaus die zweite Vorgehensweise auf lange Sicht günstiger sein.
</td><td></td><td>15</td><td>20</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

Aufgabe 2: Kosten für Systemabstürze — Gy, GS, TG, WG

Die Modellierung soll Kostenvergleiche ermöglichen; dabei muss erkannt werden, unter welchen Bedingungen die Poisson- bzw. die Normalverteilung als Näherung passt.

Die Aufgabe entspricht in Teilen und stark verändert einer Aufgabe aus dem Abitur 1999 in Bayern.

Aufgabenstellung

Ein Unternehmensberater stellt nach einer Beobachtungsphase für das Netzwerk eines Unternehmens folgende Annahmen auf:

Die Zufallsvariable X, die die Anzahl der täglichen Systemabstürze beschreibt, hat ungefähr eine Verteilung mit folgenden Werten:

X	0	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	0,64	0,29	0,06	0,01

- Die Kosten, die durch fest angestellte Techniker zur Behebung der Systemabstürze entstehen, belaufen sich auf ungefähr 40.000,-- Euro pro Jahr (das Jahr soll 365 Tage haben, d.h. das System läuft jeden Tag).
- Die einzelnen Abstürze treten unabhängig voneinander auf und sind zu 60% auf reine Bedienungsfehler zurückzuführen.

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung von X.

b) Der Unternehmensberater schlägt vor, die Systemabstürze nicht von eigenen Technikern, sondern von einer Servicefirma beheben zu lassen. Er legt ein Angebot vor, aus dem hervorgeht, dass die Behebung 180,-- Euro pro Absturz kosten soll; außerdem kalkuliert er Nebenkosten von 50,-- Euro für den ersten Absturz pro Tag und 80,-- Euro für jeden weiteren Absturz am selben Tag ein für die geringe Zeitverzögerung, die durch die Anreise der Servicefirma jeweils entsteht. Lohnt es sich, das Angebot anzunehmen?

c) Die Annahmen über die Kosten stimmen nur, wenn es höchstens 140 Tage pro Jahr gibt, an denen mindestens ein Absturz stattfindet – sonst müsste man wegen der Störungen im Betriebsablauf die Kosten höher veranschlagen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Obergrenze eingehalten wird und beurteilen Sie, ob die Annahmen des Unternehmensberaters zu gewagt sind.

d) Außerdem schlägt der Unternehmensberater vor, durch eine Schulung des Personals die Zahl der Bedienungsfehler herabzusetzen. Aus früheren Erfahrungen schätzt er ab, dass sich die Zahl der reinen Bedienungsfehler halbiert. Um eine Abschätzung darüber geben zu können, wie viel Kosten pro Jahr man dadurch einsparen könnte, wählt er folgendes Verfahren:

- Die oben angegebene Verteilung entspricht ungefähr einer Poisson-Verteilung mit dem in a) berechneten Erwartungswert.
  Zeigen Sie, dass diese Annahme richtig ist.
- Nun berechnet er den Erwartungswert für die Gesamtzahl der Fehler pro Tag unter der Annahme, dass sich die Zahl der reinen Bedienungsfehler halbiert, die der übrigen Abstürze aber gleich bleibt.

Bestimmen Sie diesen Erwartungswert ebenfalls und ermitteln Sie mit diesem Erwartungswert unter der Annahme einer Poisson-Verteilung die zu erwartende Kostenersparnis – dabei können Sie die berechneten Wahrscheinlichkeiten auf 2 Nachkommastellen runden.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>$E(X) = 0,44$ $\mathrm{Var}(x) = 0,4264$; $\sigma(X) = 0,6530$</td><td>15</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Bei Behebung der Abstürze durch eine Servicefirma entstehen folgende Kosten:
bei 1 Absturz pro Tag 230,-- Euro;
bei 2 Abstürzen 490,-- Euro und
bei 3 Abstürzen 750,-- Euro.
Dies ergibt einen erwarteten Kostenbedarf von 103,60 Euro pro Tag und ist somit günstiger als das Beschäftigen eigener Mitarbeiter.
(Für die Berechnung muss man die Kosten mit den Wahrscheinlichkeiten der gegebenen Verteilung gewichten und anschließend auf ein Jahr umrechnen.)</td><td>5</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Hier gibt es verschiedene Ansatzmöglichkeiten: Z.B. könnte die Normalverteilung als Näherung der Binomialverteilung mit $p = 0,36$ genommen werden. Als Begründung für diese Näherung könnte man auf die große Zahl der Tage, das nicht seltene Ereignis oder die Varianz, die größer als 9 ist, eingehen.
Wenn Y die Zahl der Tage mit Absturz beschreibt, so ist
$E(Y) = 0,36 \cdot 365 = 131,4$ und $\sigma(Y) = 9,170$.
$P(Y \leq 140) = \Phi((140,5\text{-}131,4)/9,170) = \Phi(0,992) = 0,8394$
Damit erscheint es etwas, aber nicht sehr gewagt, die Kosten so anzusetzen. Selbstverständlich sind auch andere Einschätzungen dieser Wahrscheinlichkeit möglich.</td><td></td><td>20</td><td>10</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Beim Vergleich der gegebenen Tabelle mit der einer Poisson-Verteilung mit dem Erwartungswert 0,44 sieht man nur eine einzige Abweichung um ein Hundertstel.
Da nur die reinen Bedienungsfehler weniger werden, die übrigen Fehler aber bleiben, kann man nach der Schulung davon ausgehen, dass der neue Erwartungswert $0,70 \cdot 0,44 = 0,308$ ist.
<table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>Wahrscheinlichkeit</td><td>0,73</td><td>0,23</td><td>0,03</td><td>0,00</td></tr></table>
Der neue Kostenbedarf bei der Servicefirma ist nun 67,60 Euro pro Tag, d.h. die erwarteten Einsparungen liegen bei 13.140,-- Euro pro Jahr.</td><td>5</td><td>20</td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>

Aufgabe 3: Batterien Gy, GS, TG, WG

Die Modellierung sollte zu Anwendungen verschiedener Verteilungen (Binomial-, Poisson- und Normalverteilung) führen.
Die Aufgabe entspricht einer Aufgabe aus dem Abitur 1999/2000 aus Sachsen.

Aufgabenstellung

Ein Betrieb stellt Batterien für grafikfähige Taschenrechner her. Der Ausschussanteil beträgt 2%. Die einzelnen Ausschussstücke treten stochastisch unabhängig voneinander auf.

a) Margret kauft 4 Batterien.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei dieser Batterien Ausschuss sind.
Margret behauptet, die Wahrscheinlichkeit, dass alle vier Batterien Ausschuss sind, sei kleiner als die Wahrscheinlichkeit, im Lotto „6 aus 49“ sechs richtige Zahlen zu tippen.
Entscheiden Sie, ob Margrets Behauptung richtig ist.

b) Batterien werden für den Versand an Einzelhändler in Kartons zu je 100 Stück verpackt.
Bestimmen Sie die durchschnittliche Anzahl von Ausschussstücken in einem Karton und die Wahrscheinlichkeit, dass diese Durchschnittszahl nicht überschritten wird.

c) Nach Angaben des Betriebes ist die Lebensdauer der Batterien normalverteilt mit einem Erwartungswert von 300 Betriebsstunden und einer Standardabweichung von 15 Betriebsstunden.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine für Prüfzwecke zufällig der laufenden Produktion entnommene Batterie höchstens 280 Betriebsstunden erreicht.

d) Die Herstellung einer Batterie kostet 1 €. Um wirtschaftlich zu arbeiten, muss der Betrieb je Batterie einen Reingewinn von mindestens 0,10 € erzielen. Um konkurrenzfähig zu bleiben, sollte der Abgabepreis einer Batterie maximal 1,32 € betragen. Der Reingewinn wird dadurch gemindert, dass der Betrieb sich verpflichtet hat, Ausschussstücke zurückzunehmen und durch extra geprüfte, funktionierende Batterien zu ersetzen. Die Kosten für diesen Umtausch und die zusätzliche Prüfung betragen 3 € je defekter Batterie.
Beurteilen Sie, ob unter diesen Bedingungen eine wirtschaftliche Produktion möglich ist.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>X beschreibe die Anzahl der Ausschussstücke unter den 4 gekauften Batterien. Da diese der großen Menge zufällig entnommen wurden, ist X binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = 0{,}02$.
$$P(X=2) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^2 = 2{,}3 \cdot 10^{-3}$$
$$P(X=4) = 0{,}02^4 = 1{,}6 \cdot 10^{-7}$$
Damit ist Margrets Behauptung falsch, da die Wahrscheinlichkeit beim Lotto
$p = \frac{1}{\binom{49}{6}} = 7{,}151 \cdot 10^{-8}$ und damit geringer ist.</td><td>10</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Y beschreibe die Anzahl der Ausschussstücke in einem Karton. Da die Verpackung der Batterien ungeprüft und zufällig erfolgt, kann man Y als binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0{,}02$ annehmen. Dann entspricht der Erwartungswert genau dem durchschnittlichen Ausschuss von 2 Batterien. Die Wahrscheinlichkeit, dass dieser nicht überschritten wird, lässt sich durch $P(Y \le 2)$ beschreiben:
$$P(Y \le 2) = 0{,}98^{100} + \binom{100}{1} \cdot 0{,}02^1 \cdot 0{,}98^{99} + \binom{100}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{98} = 0{,}6767\,.$$
Alternativ zu dieser Berechnung kann der Wert aus einer Tabelle der Binomialverteilung abgelesen werden.
Nicht möglich ist hingegen die näherungsweise Berechnung über die Normalverteilung, da das Ereignis selten ist.
Deswegen ist aber als weitere Lösungsvariante die Näherung über eine Poisson-Verteilung mit dem Erwartungswert 2 möglich:
$$P(Y \le 2) = \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} \cdot \lambda^k \cdot e^{-\lambda} = (1+2+2) \cdot e^{-2} = 0{,}6767\,.$$
Die Wahrscheinlichkeit, höchstens die durchschnittliche Anzahl von Ausschussstücken in einem Karton zu haben, ist 0,6767.</td><td>10</td><td>20</td><td>10</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Z beschreibe die Lebensdauer einer Batterie in Stunden. Die Aufgabenstellung gibt vor, dass es sich um eine normalverteilte Zufallsvariable handelt, die Normalverteilung dient hier also nicht als Näherung, sondern beschreibt eine stetige Zufallsvariable.
$$P(Z \le 280) = \Phi\left(\frac{280-300}{15}\right) = \Phi(-1{,}333) \approx 1 - 0{,}909 = 0{,}091$$
Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 9 %.
Die Werte sollen aus einer Tabelle der Normalverteilung abgelesen werden.</td><td></td><td>15</td><td>5</td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	Hier kann mit sehr unterschiedlichen Stückzahlen argumentiert werden. Beispielsweise erwartet man in einem Karton 2 Ausschussstücke, also muss man 6 € zu den 100 € Produktionskosten addieren, um auf die durchschnittlichen Kosten pro Karton zu kommen. Andererseits ist ein Abgabepreis bis zu 132 € möglich, so dass der durchschnittliche Reingewinn bis zu 26 € betragen kann. Da sich dieser Durchschnittswert bei einer großen Produktion einstellen wird, ist also eine wirtschaftliche Produktion möglich.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	20	55	25

Aufgabe 4: Flughafen Gy, GS, TG, WG

Die Modellierung sollte zu Anwendungen verschiedener Verteilungen (Binomial-, Poisson- und Normalverteilung) führen. Dabei ist die Normalverteilung hier nicht als Näherung, sondern als stetige Verteilung anzusehen. Außerdem geht es um Baumdiagramme mit unterschiedlich langen Pfaden.
Die Aufgabe entspricht ergänzt und verändert einer Aufgabe aus dem Abitur 1999/2000 in Sachsen.

Aufgabenstellung

a) Aus den Passagierlisten des Hamburger Flughafens von 2002 geht hervor, dass 40 % der Passagiere Einwohner von Hamburg und seinem Umland, 40 % der Passagiere Einwohner der anderen Bundesländer Deutschlands und 20 % der Passagiere Einwohner anderer Staaten sind. Bei einer statistischen Erhebung werden Passagiere zufällig ausgewählt, wobei die Auswahl als stochastisch unabhängig angenommen werden soll.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass drei zufällig ausgewählte Passagiere aus Hamburg und seinem Umland stammen.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter fünf zufällig ausgewählte Passagieren mehr Einwohner anderer Staaten als Einwohner Deutschlands befinden.

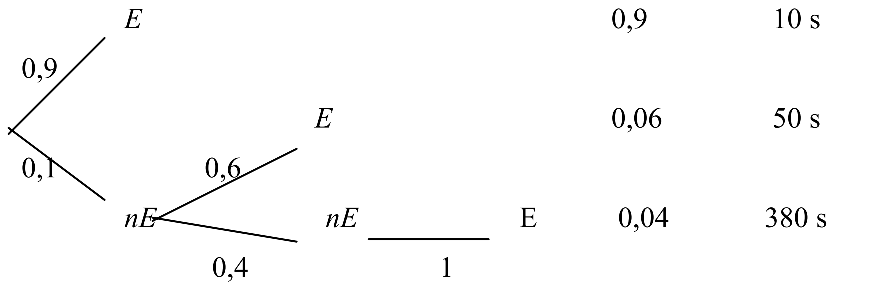
b) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gepäckstück den Zielflughafen Frankfurt hat, sei p. Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei zufällig herausgegriffenen Gepäckstücken mindestens eines nicht den Zielflughafen Frankfurt hat, ist 90 %. Bestimmen Sie p.

c) Das Handgepäck wird wie folgt kontrolliert:
Bei Kontrolle 1 wird das Gepäck mit einem Spezialgerät durchleuchtet. Nur wenn dieser Vorgang kein eindeutiges Ergebnis liefert, wird er ein zweites Mal durchgeführt (Kontrolle 2). Liegt dann immer noch kein eindeutiges Ergebnis vor, wird das Gepäckstück geöffnet und durch einen Mitarbeiter geprüft (Kontrolle 3). Kontrolle 1 und Kontrolle 2 dauern je 10 Sekunden, Kontrolle 3 dauert 5 Minuten. Zwischen zwei Kontrollvorgängen bei einem Gepäckstück vergehen 30 Sekunden.
Kontrolle 1 liefert zu 90 % ein eindeutiges Ergebnis, Kontrolle 2 zu 60%.
Ermitteln Sie die durchschnittlich für die Gepäckkontrolle eines Handgepäckstückes benötigte Zeit.

d) Bei den aufgegebenen Gepäckstücken wird das Gewicht bestimmt. Aus langer Erfahrung kennt man den Mittelwert von 15 kg und die Standardabweichung von 3 kg. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig herausgegriffenes Gepäckstück ein Gewicht m von mindestens 14 kg und höchstens 16 kg?

e) Aufgrund intensiver Bemühungen ist es gelungen, dass pro Tag im Durchschnitt nur 2 aufgegebene Gepäckstücke verloren gehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass am heutigen Tag mehr als 2 Gepäckstücke verloren gehen?

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Da durch die Aufgabe eine binomialverteilte Zufallsvariable beschrieben wird, gilt: Aus Hamburg und seinem Umland kommen die drei ausgewählten Passagiere mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}4^3 = 0{,}064$. Das zweite gesuchte Ereignis tritt ein, wenn von den $n = 5$ Ausgewählten 3, 4 oder 5 Einwohner anderer Staaten sind. Die Wahrscheinlichkeit ist: $\binom{5}{3}\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^2+\binom{5}{4}\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8+0{,}2^5=0{,}05792$.	10	5	
b)	Die gegebenen Größen führen auf die Gleichung $1-p^2 = 0{,}90$ und damit $p = 0{,}3162$.		15	
c)	Für die Lösung empfiehlt sich ein Baumdiagramm (*E* bedeute, dass die Kontrolle eindeutig sein, *nE* das Gegenteil): Kontrolle1 Kontrolle 2 Kontrolle 3 Wahrscheinl. benötigte Zeit  Hieraus ergibt sich ein Erwartungswert von 27,2 Sekunden, die also durchschnittlich für die Kontrolle eines Handgepäckstückes zu veranschlagen sind.		20	5
d)	Da das Gewicht eine stetige Größe ist und die Messungen schon über eine sehr lange Zeit und damit von sehr vielen Gepäckstücken erfolgen, liegt die Annahme nahe, dass das Gewicht normalverteilt ist. Andere Ansätze müssten begründet werden und würden sicherlich eine numerische Auswertung fast unmöglich machen. *X* beschreibe das Gewicht der Gepäckstücke, dann gilt: $P(14\le X\le 16)=\Phi\left(\frac{16-15}{3}\right)-\Phi\left(\frac{14-15}{3}\right)=2\cdot\Phi(0{,}333)-1\approx 26\%$.	5	20	
e)	Da täglich sehr viele Gepäckstücke aufgegeben werden, bietet es sich an, die Zahl der verloren gegangenen Gepäckstücke durch eine Poisson-Verteilung mit dem Erwartungswert 2 zu beschreiben: $P(Y\le 2)=\sum_{k=0}^{2}\frac{1}{k!}\cdot\lambda^k\cdot e^{-\lambda}=(1+2+2)\cdot e^{-2}=0{,}6767$.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 2 Gepäckstücke verloren werden, ist also $1 - 0{,}6767 \approx 32\ \%$.			20
	Insgesamt 100 BWE	15	60	25

Aufgabe 5: Qualitätskontrolle Gy, GS, TG, WG

Aufgabenstellung

Ein Unternehmen stellt ein elektronisches Bauteil in Massenproduktion auf zwei verschiedenen Produktionsanlagen her:
Auf der neuen Anlage A beträgt der Anteil mangelhaft produzierter Artikel etwa 25%.
Die alte Anlage B produziert etwa 50% mangelhafte Artikel.
(Bei großen Stückzahlen können bei beiden Anlagen die dabei auftretenden Schwankungen vernachlässigt werden.)
Die neue Anlage A hat eine größere Produktionskapazität und produziert gegenüber der alten Anlage B etwa die vierfache Menge pro Tag.

Die in einer Anlage produzierten Artikel werden jeweils zu mehreren tausend Stück in Kisten verpackt und ihrer Herkunft entsprechend jeweils mit dem Prädikat „von Anlage A" bzw. „von Anlage B" versehen und – natürlich zu unterschiedlichen Preisen – verkauft.

In der Versandstelle kommt es immer mal wieder vor, dass eine Kiste versehentlich nicht gekennzeichnet wird und dass auch durch Rückfragen die Herkunft des Artikels nicht geklärt werden kann.

Verkauft das Unternehmen nun eine solche Kiste fälschlicherweise mit dem Prädikat „von Anlage A", so muss es mit einer Schadenersatzforderung von 9000 € rechnen.

Wird die Kiste hingegen mit dem Prädikat „von Anlage B" verkauft, obwohl die Artikel von der moderneren Maschine produziert wurden, so entsteht der Firma ein Verlust von 1000 €.

a) Welche Kosten entstehen dem Unternehmen langfristig pro Kiste, wenn es in einer solchen Situation die betreffende Kiste
(1) grundsätzlich mit der Aufschrift „von Anlage A"
(2) grundsätzlich mit der Aufschrift „von Anlage B" verkauft?
Welche dieser beiden Strategien ist also vorzuziehen?

b) Um die Kosten zu senken, wurde beim letzten Mal der Betriebsstatistiker – ein *Bayesianer* – hinzugezogen.
Er nahm eine Stichprobe von 20 Artikeln aus der Kiste und stellte fest, dass 15 Stück in Ordnung waren.
Welche a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten hat er den beiden Ereignissen
-- „Die kritische Kiste stammt von Maschine B"
-- „Die kritische Kiste stammt von Maschine A"
zugeordnet und wie hat er dann entschieden?

c) Begründen Sie, dass der Statistiker bei seiner Entscheidung ins Grübeln käme, falls bei einer Überprüfung einer solchen Kiste die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
„Die kritische Kiste stammt von Maschine B" genau $\frac{1}{10}$ wäre.

d) Leiten Sie aus dem Ergebnis von c) ein Entscheidungsverfahren ab, das angibt, für welche Realisierungen der Prüfgröße

X:= Anzahl der Artikel, die bei 20 Ziehungen in Ordnung sind

die Firma nach dem Rat des Statistikers die Kiste mit der Aufschrift „von Anlage A“ verkaufen sollte.
(Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Bayes-Formel für $P(B|X{=}k)$ gerade den in c) betrachteten Wert geliefert hätte und lösen Sie nach k auf).

e) Da der beschriebene Statistiker gekündigt hat, stellt die Firma einen neuen Statistiker ein, der ein Spezialist für Hypothesentests ist.
Dieser entwickelt einen Hypothesentest mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 1\%$, wobei er als Irrtum 1. Art denjenigen wählt, der die gravierendere Konsequenz nach sich zieht. Welches Entscheidungsverfahren schlägt der neue Statistiker vor?

f) Nehmen Sie zu den unterschiedlichen Ergebnissen von d) und e) Stellung.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Der Sachverhalt wird wie folgt modelliert: Den beiden Ereignissen A: „Die kritische Kiste stammt von Maschine A“ B: „Die kritische Kiste stammt von Maschine B“ geben wir wegen der unterschiedlichen Produktionskapazitäten die a-priori-Wahrscheinlichkeiten $P(A)=\frac{4}{5}$ und $P(B)=\frac{1}{5}$. Die erwarteten zusätzlichen Kosten betragen also bei Strategie (1): $E(K)=\frac{1}{5}\cdot 9000\ € = 1800\ €$ und bei Strategie (2): $E(K)=\frac{4}{5}\cdot 1000\ € = 800\ €$. Strategie (2) ist also vorzuziehen.	20		
b)	X sei die Anzahl der defekten Artikel bei der Stichprobe. Wir nehmen an, dass X B(20,p)-binomialverteilt ist. $P(A\mid X=5)=\dfrac{P(A)\cdot B(20,\frac{1}{4},5)}{P(A)\cdot B(20,\frac{1}{4},5)+P(B)\cdot B(20,\frac{1}{2},5)}$ $\approx 98{,}2\ \%$ Verkauft man die Kiste mit der Aufschrift „von Anlage A“, betragen die erwarteten Zusatzkosten also $(1-0{,}982)\cdot 9000\ € \approx 162\ €$. Im anderen Fall erhält man $0{,}982\cdot 1000\ € \approx 982\ €$, also sollte man die Kiste mit der Aufschrift „von Anlage A“ verkaufen.	10	10	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	In diesem Falle wären die Erwartungswerte $\frac{1}{10}\cdot 9000=900$ und $\frac{9}{10}\cdot 1000=900$ zu vergleichen. Der Statistiker könnte zumindest nach dem Verfahren von a) nicht entscheiden, wie die Kiste zu kennzeichnen wäre.		10	
d)	Die Entscheidungssituation „kippt" also, wenn $P(B \mid X{=}k) = \frac{1}{10}$. Darum lösen wir $P(B \mid X=k)=\dfrac{P(B)\cdot B(20,\frac{1}{2},k)}{P(A)\cdot B(20,\frac{1}{4},k)+P(B)\cdot B(20,\frac{1}{2},k)}=\dfrac{1}{10}$ nach k auf. Wir erhalten die Gleichung: $\dfrac{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}^{20}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}^{k}\cdot\frac{3}{4}^{(20-k)}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}^{20}}=\dfrac{1}{10}$ mit der Lösung $k = 6{,}64...$ Also wird der Statistiker falls $X \le 6$ für die Aufschrift „von Anlage A", ansonsten für „von Anlage B" plädieren.		15	10
e)	Das Ereignis B wird als Nullhypothese über den unbekannten Parameter p einer Bernoulli-Urne gewählt: $H_0: p_0=0{,}5$, und es wird die Alternativhypothese $H_1:\ p<0{,}5$ bei 20 Ziehungen getestet. Dies ergibt folgenden Ablehnungsbereich: $X \le 4$ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art von $\alpha = 0{,}6$ %.	5	10	
f)	Das Verfahren aus e berücksichtigt das Vorwissen über die unterschiedlichen Produktionskapazitäten nicht, das ja eher für eine Kiste erster Wahl spricht. Es ist „vorsichtiger" im Hinblick auf den gravierenden Schaden von 9000 € . Der vorgegebene Wert $\alpha \le 1$ % ist sehr willkürlich. Diese Willkür ist aber Teil der Testlogik bei Signifikanztests.			10
	Insgesamt 100 BWE	35	45	20

Aufgabe 6: Buchungsrisiken Gy, GS, TG, WG

Aufgabenstellung

Das Reisebüro "KONTAKTE" vermittelt 2-wöchige Pauschalreisen für Alleinreisende in das Feriendorf "CLUB FROHSINN". In der Hauptsaison steht dem Reisebüro ein Kontingent von 100 Plätzen zu, die immer ausgebucht sind, weil die Nachfrage bedeutend höher ist. Erfahrungsgemäß pflegen aber kurz vor Reisebeginn einige Kunden aus unterschiedlichen Gründen die Reise abzusagen.
Die über lange Zeiten geführte und gepflegte Statistik weist aus, dass im Mittel etwa 5 % der gebuchten und vermittelten Plätze im "Club Frohsinn" kurzfristig abgesagt werden.

a) Unter welchen Umständen ist es sinnvoll, die Anzahl X der in der Hauptsaison eine Buchung für einen bestimmten Reisetermin im "Club Frohsinn" kurzfristig absagenden Reisekunden als binomialverteilt anzunehmen? Diskutieren Sie diese Frage auch für den hier nicht betrachteten Fall, dass das Reisebüro auch Plätze für Gruppen und Familien anbietet.

Im Weiteren soll angenommen werden, dass die in a) genannte Zufallsgröße X tatsächlich (annähernd) binomialverteilt ist.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in der Hauptsaison für einen bestimmten Termin
   - genau 5 Reisegäste
   - mindestens 3 Reisegäste
   - höchstens 4 Reisegäste
   - 3 oder 4 Reisegäste

   kurzfristig absagen?

Um die Ferienplätze besser auslasten zu können, lässt das Reisebüro Überbuchungen zu, und zwar nimmt es pro Reise in der Hauptsaison 102 Buchungen an und geht das Risiko ein, dass es bei zu wenigen Absagen großen Ärger gibt.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es solchen großen Ärger gibt, dass also mindestens ein Reisegast seine gebuchte und auch wirklich gewünschte Reise nicht antreten kann?

d) An einer verkauften Reise verdient das Reisebüro 200,- €, ein nicht besetzter Platz wird von dem Reisebüro als ohne Gewinn oder Verlust kalkuliert, da zwar der Kunde Anzahlungen leistet, aber auch der Reiseveranstalter Forderungen und das Reisebüro Verwaltungskosten hat. Im Falle von Überbuchungen macht das Reisebüro pro "Fall" einen Verlust (negativen Gewinn) von 1000,- €, der im Wesentlichen durch Entschädigungsleistungen zu Stande kommt.
   Welche Gewinnerwartung (= Erwartungswert des Gewinns) hat das Reisebüro pro Reisetermin in der Hauptsaison an der Vermittlung von Plätzen im "Club Frohsinn"? Loht es sich also für das Reisebüro Überbuchungen zuzulassen?
   Nehmen Sie zum einfacheren Rechnen an, dass alle buchenden und nicht absagenden Kunden jeweils den Gewinn von 200,- € einbringen, dass aber Kunden, die die gebuchte Reise antreten wollen und nicht können, für das Reisebüro einen Verlust von 1200,- € bedeuten.

e) Begründen Sie, dass das Reisebüro pro Reisetermin in der Hauptsaison 103 Buchungen zulassen sollte, wenn die Gewinnerwartung maximal sein soll.

f) In der Nachsaison ist die Nachfrage nach Reisen deutlich geringer. In den Herbstferien etwa hat das Reisebüro nach seiner eigenen Statistik eine echte Nachfrage von im Mittel etwa 10 Personen für den "Club Frohsinn" ('echt' heißt hier, dass die kurzfristigen Absagen bei dieser Statistik schon abgezogen worden sind).
Wie viele Plätze darf das Reisebüro für die Herbstferien beim Veranstalter als Kontingent höchstens bestellen, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass es einen Platz nicht verkaufen kann, kleiner als 5 % sein soll?
Begründen Sie dazu, dass es unter plausiblen Annahmen sinnvoll ist, zur Beantwortung dieser Frage die Poisson-Verteilung für die Anzahl der Reisewilligen heranzuziehen.

Zur Lösung der Aufgabe kann die Tabelle verwendet werden, allerdings sollte dann dargestellt werden, wie man die abgelesenen Werte prinzipiell selbst berechnen kann.

Anhang:
Tabelle einiger Werte der Binomialverteilung $B_{n,p}(k)$ für p = 5 %.

n \ k	0	1	3	3	4	5
100	0,00592	0,03116	0,08118	0,13958	0,17814	0,18002
101	0,00562	0,02990	0,07868	0,13666	0,17621	0,17992
102	0,00562	0,02868	0,07624	0,13376	0,17424	0,17974
103	0,00508	0,02752	0,07386	0,13088	0.17221	0,17946
104	0,00482	0,02640	0,07155	0,12803	0,17015	0,17910
105	0,00458	0,02532	0,06929	0,12521	0,16804	0,17865

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Es geht um die Frage der stochastischen Unabhängigkeit der einzelnen Absagen, die z.B. dann nicht gegeben ist, wenn durch Unwetter am Urlaubsort, durch eine ökonomische Krise oder durch eine Katastrophe in der Luftfahrt das Absageverhalten bestimmt wird; sie gilt auch dann nicht, wenn Familien oder Gruppen reisen, weil "menschliche Beziehungen" hier auch stochastische Abhängigkeiten verursachen. Es wird von den Schülerinnen und Schülern eine "ergebnisoffene", zusammenhängende Darstellung erwartet.	15	5	
b)	Dieser Aufgabenteil kann mit der oberen Zeile der anliegenden Tabelle leicht gelöst werden. Erwartet wird eine Erläuterung des Vorgehens. Die Ergebnisse: - P(„genau 5 Absagen“) $\approx$ 18 % - P(„mindestens 3 Absagen“) $\approx$ 88,2 % - P(„höchstens 4 Absagen“) $\approx$ 43,6 % - P(„3 oder 4 Absagen“) $\approx$ 31,8 %	20		
c)	Da in der Hauptsaison - wie dargestellt - die Nachfrage sehr groß ist, kann immer angenommen werden, dass die angebotenen Plätze auch gebucht werden. Die Absagen können wir unter den gleichen Annahmen wie in a) als $\mathrm{B}_{n;0,5}$-verteilt ansehen, wobei n die Anzahl der angebotenen und damit auch gebuchten Plätze bezeichnet. Es kommt zum Ärger, wenn für n = 102 weniger als 2 Kunden absagen: Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich als Summe der ersten 2 Zahlen in der Zeile für n = 102 aus der anliegenden Tabelle: P(„großer Ärger“) $\approx$ 3,4%.		10	
d)	Für den Erwartungswert der im Sinne des Hinweises fiktiven Einnahmen gilt: $E(\text{"Einnahmen"}) = 200 \cdot 102 \cdot 0{,}95\ € = 19380\ €$. Denn die Anzahl der Buchenden wird als $\mathrm{B}_{n;0,95}$-binomialverteilt angenommen. Für den Erwartungswert des Verlustes gilt: $E(\text{"Verlust"}) = 1200 \cdot \sum_{k=101}^{102} (100-k) \cdot \binom{102}{k} \cdot 0{,}95^{k} \cdot 0{,}05^{(102-k)}\ €$ $\approx 47{,}25\ €$. De Gewinnerwartung beträgt also 19380 € – 47,25 € $\approx$ 19333 €. Ohne Überbuchung wäre die Gewinnerwartung $200 \cdot 100 \cdot 0{,}95\ € = 19000\ €$. Das Überbuchen lohnt sich also für das Reisebüro.		10	5

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
e)	Wir betrachten die Rechnung von d) als Funktion der angebotenen Plätze n $E(n) = 200 \cdot n \cdot 0{,}95 - 1200 \cdot \sum_{k=101}^{n} (100-k) \cdot \binom{n}{k} \cdot 0{,}95^k \cdot 0{,}05^{(n-k)}$ [€]. Wir erhalten (mit Hilfe des Anhangs) folgende Wertetabelle: n: 102, 103, 104 — $E(n)$: 1933, 1940, 1932 Aus dieser geht hervor, dass das Optimum bei $n = 103$ liegt.		15	10
f)	Wenn man annimmt, dass es für eine Herbstreise in den "Club Frohsinn" eine große Zahl potentieller Interessenten gibt, die sich unabhängig voneinander mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Reise entscheiden, dann kann man die Anzahl der tatsächlich zu einem Termin Reisewilligen als $B_{n;p}$-verteilt annehmen mit sehr großem n und sehr kleinem p, aber bekanntem $n \cdot p = 10$. Das ist die typische Situation, die eine Poisson-verteilte Zufallsvariable Y beschreibt: $P(Y = k) = \frac{e^{-\mu} \cdot \mu^k}{k!}\mu$, wobei hier $\mu = 10$. Wenn man die akkumulierte Verteilung, d.h. die Verteilungsfunktion $F(k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-10} \cdot 10^i}{i!}$ für die ersten Werte von k ausrechnet, erhält man folgende Wertetabelle: k: 0, 1, 2, 3, 4, 5 — $F(k)$ [%]: 0,005, 0,05, 0,27, 1,03, 2,9, 6,7 Wenn das Reisebüro also 5 Plätze bestellt, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass nicht alle nachgefragt werden, 2,9 %. Bestellt es mehr, steigt die Wahrscheinlichkeit über 5 %.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	50	25

Wertetabelle zu e):

n	102	103	104
$E(n)$	1933	1940	1932

Wertetabelle zu f):

k	0	1	2	3	4	5
$F(k)$ [%]	0,005	0,05	0,27	1,03	2,9	6,7

Aufgabe 7: Wahlen **Gy, GS, TG, WG**

Aufgabenstellung

Drei Monate vor der Wahl gibt eine Partei A einem Meinungsforschungsinstitut den Auftrag, in einer Umfrage herauszufinden, wie viel Prozent der Wahlberechtigten diese Partei zu diesem Zeitpunkt wählen würden.

a) Erläutern Sie, was bei der Umfrage berücksichtigt werden muss, damit sie durch eine Binomialverteilung modelliert werden kann.

b) Aufgrund des letzten Wahlergebnisses geht das Institut davon aus, dass der Stimmenanteil dieser Partei ca. 40 % beträgt.
Wie viele Personen müssen mindestens befragt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % die Abweichung des Umfrageergebnisses vom Wahlverhalten aller Wahlberechtigten höchstens 2 Prozentpunkte beträgt?

Von 1800 befragten Wahlberechtigten geben 639 an, dass sie zu diesem Zeitpunkt die Partei A wählen würden.

c) Relative Häufigkeiten R (bzw. absolute Häufigkeiten H) werden als „verträglich mit p" bezeichnet, wenn sie innerhalb der $1{,}96\cdot\sigma(R)$- Umgebung von $\mu(R)$ liegen (bzw. innerhalb der $1{,}96\cdot\sigma(H)$- Umgebung von $\mu(H)$ liegen.
Zeigen Sie, dass dieses Umfrageergebnis **nicht** verträglich ist mit $p = 0{,}4$.

d) Berechnen Sie das Intervall aller Werte von p, mit denen das Umfrageergebnis verträglich ist, das so genannte 95 %-Konfidenzintervall für p.

e) Wenn p nun vermutlich kleiner als 40 % ist, müsste dann die Befragung noch einmal durchgeführt werden, da der unter b) berechnete notwendige Umfang der Stichprobe dann unter einer falschen Voraussetzung bestimmt wurde?

Drei Monate später, am Wahltag, erhält die Partei A 30,8 % der abgegebenen Stimmen.

f) Welche Erklärungen gibt es für das Umfrageergebnis?

Um das Ergebnis zu analysieren, sollen 400 zufällig ausgesuchte Wähler befragt werden.

g) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter diesen 400 Personen zwischen 120 und 140 Wähler der Partei A ?

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
a)	Die Befragung einer Person kann als Bernoulli-Experiment angesehen werden. Selbst wenn „ohne Zurücklegen“ gezogen wird, verändert sich die Trefferwahrscheinlichkeit p auf Grund der großen Anzahl der Wahlberechtigten vernachlässigbar wenig. Die Befragung der einzelnen Personen muss stochastisch unabhängig voneinander erfolgen, das heißt z.B., dass man nicht eine ganze Gruppe von sich kennenden Personen oder nur in einem bestimmten Stadtteil befragen sollte: jede Person muss die gleiche Chance haben, ausgewählt zu werden.		15	
b)	Aussagekräftig ist ein Stichprobenergebnis erst bei großem n, so dass die binomialverteilte Zufallsgröße X, die die Stimmen für die Partei A in dieser Stichprobe zählt, durch die Normalverteilung approximiert werden kann. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% und $\sigma = \sqrt{p\cdot(1-p)}$ gilt dann: $\left\lvert \frac{X}{n} - p \right\rvert \le 1{,}64 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Soll die Abweichung maximal 2 Prozentpunkte betragen, so muss gelten: $1{,}64 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}64\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \le 0{,}02$. Mit $p = 0{,}4$ ergibt sich $n \ge 1614$.		15	
c)	$n = 1800$, $p = 0{,}4$, $\mu = n\cdot p = 720$, $\sigma = \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} \approx 21$, $1{,}96\sigma = 40{,}7$. Das kleinste mit $p = 0{,}4$ verträgliche Stichprobenergebnis ist also 679. (Ebenso kann auch die $1{,}96\frac{\sigma}{n}$ – Umgebung um $p = 0{,}4$ betrachtet werden.)	10		
d)	Lösungsweg 1: (so genanntes *echtes* Konfidenzintervall) Gesucht sind alle Werte für p, für die gilt: $\left\lvert \frac{X}{n} - p \right\rvert \le 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Mit $n = 1800$ und $\frac{X}{n} = 0{,}355$ ergibt sich die Ungleichung: $\lvert 0{,}355 - p \rvert \le 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{1800}}$. Quadrieren ergibt $1800\cdot(0{,}355-p)^2 \le 1{,}96^2(p-p^2)$. Mit 4- bzw.8-stelliger Genauigkeit in der Rechnung erhält man letztlich auf 3 Stellen gerundet $0{,}333 \le p \le 0{,}377$. Lösungsweg 2: (so genanntes Näherungs-Konfidenzintervall) Da $n = 1800$ hinreichend groß und das betrachtete Ereignis nicht selten ist, kann die relative Häufigkeit r als Realisierung einer Zufallsvariablen R angenommen werden , die näherungsweise normalverteilt ist, wobei die unbekannte Varianz durch die Stichprobenvarianz abgeschätzt wird. Also gilt: $\sigma^2 \approx \frac{n}{n-1}\cdot r\cdot(1-r) = \frac{1800}{1799}\cdot\frac{639}{1800}\cdot\frac{1161}{1800} = 0{,}2291 \approx r\cdot(1-r)$.			

	Lösungsskizze	I	II	III
	Bei n-facher Durchführung und 95%iger Sicherheit ergibt sich als Radius des Konfidenzintervalls $$1{,}95996\cdot\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\approx 0{,}022\,.$$ Mit 95%iger Sicherheit kann man also abschätzen, dass auch bei der Gesamtstichprobe (also der Wahl) mit bedeutend größerem n die relative Häufigkeit im Intervall [0,333;0,377] liegt.		20	
e)	In die Rechnung von b) geht p in dem Term $p(1-p)$ ein. Die zugehörige nach unten geöffnete Parabel hat ihren Scheitelpunkt bei $p = 0{,}5$. Für $p < 0{,}4$ wird n kleiner, die geforderte Genauigkeit wäre also schon bei einem kleineren Stichprobenumfang gegeben gewesen. Die Umfrage muss nicht wiederholt werden.			10
f)	1) Auch vor 3 Monaten war p deutlich kleiner als geschätzt, lag also außerhalb des in d) berechneten Konfidenzintervalls. - Die Stichprobe war nicht repräsentativ ausgewählt und es ergab sich so ein falsches Bild. - Die Stichprobe war repräsentativ; es ist jedoch einer der außergewöhnlich seltenen Fälle (< 2,5%) eingetreten, in denen das Ergebnis einer Stichprobe signifikant nach unten vom Erwartungswert abweicht. 2) Vor 3 Monaten war p deutlich größer; innerhalb des Vierteljahres haben jedoch viele Wähler ihre Meinung geändert.	5	5	10
g)	X bezeichne die Anzahl der Wähler der Partei in einer Stichprobe vom Umfang $n = 400$. Zu berechnen ist: $P(120 \le X \le 140)$ mit $p = 0{,}308$, $\mu = 123{,}2$. $\sigma = \sqrt{400\cdot 0{,}308\cdot 0.692} = \sqrt{85{,}2544} > 3$. Daher kann die Binomial- durch die Normalverteilung approximiert werden und es gilt: $P(120 \le X \le 140) \approx \phi(\frac{140{,}5-\mu}{\sigma}) - \phi(\frac{119{,}5-\mu}{\sigma}) \approx 0{,}625.$		10	
	Insgesamt 100 BWE	15	65	20

Aufgabe 8: Selbstheilung oder Therapieerfolg Gy, GS, TG, WG

Bei dieser Aufgabe geht es kaum um Berechnungen, sondern um die Fehlerproblematik bei Hypothesentests mit geringem Stichprobenaufwand. Die Aufgabe entspricht ergänzt und verändert einer Aufgabe aus dem Abitur 2002 aus Mecklenburg-Vorpommern.
Hilfsmittel: Tabellen zur Binomialverteilung (n = 30) und zur Normalverteilung.

Aufgabenstellung

Zur Heilung einer seltenen Krankheit gab es bislang noch keine wirksame Behandlung. Glücklicherweise stellte sich trotzdem bei ca. 35 % aller Patienten von allein deren Genesung ein (Selbstheilung). Die Kosten medizinischer Forschung sind sehr hoch. Daher beschloss die Europäische Gemeinschaft, ein internationales Forscherteam zu bilden. Nach zweijähriger Kooperation scheint der Durchbruch gelungen zu sein. Die Mediziner hoffen, eine Therapie gefunden zu haben, die die Heilungschancen deutlich erhöht. Zumindest wurden in der ersten Testserie von 30 Personen 18 Personen geheilt. Bevor die Forscher das Ergebnis veröffentlichen, untersuchen sie in vier weiteren Ländern Testreihen mit je 30 Freiwilligen. Dabei soll für jede Testserie folgende Entscheidungsregel gelten:
Wird mindestens die Hälfte der Testpersonen gesund, bewertet das Team das Ergebnis als „Erfolg“ und nimmt an, dass die Therapie zu zusätzlichen Erfolgen führt, sonst wird das Ergebnis als „Misserfolg“ gewertet.

a) Was bedeutet es, wenn man nach Auswahl von endlich vielen Testpersonen die Anzahl der genesenen Testpersonen als binomialverteilt annimmt?

b) Zu welchen falschen Bewertungen kann man in dieser Situation gelangen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit würde man das Ergebnis „Erfolg“ erhalten, wenn bekannt ist, dass das Medikament völlig wirkungslos ist?

c) Angenommen, die Therapie sei wirkungsvoll und führt zu einer Erhöhung der Heilungswahrscheinlichkeit auf den Wert p. Berechnen Sie in einer Tabelle für die Werte $p = 0{,}4$, $p = 0{,}5$, $p = 0{,}6$, $p = 0{,}7$ und $p = 1$ die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten dafür, dass das Team bei 30 Personen dann auch tatsächlich zur Bewertung „Erfolg“ gelangt.

d) Setzen Sie sich mit den mit den unter b) und c) berechneten Wahrscheinlichkeiten auseinander. Vergleichen Sie dabei mit der üblichen 5%igen Signifikanz bei Hypothesentests; beurteilen Sie, ob diese hier überhaupt angebracht wäre, und beurteilen Sie die möglichen Konsequenzen von Fehlentscheidungen.

e) Wie muss die oben angegebene Entscheidungsregel verändert werden, wenn der Geldgeber fordert, dass die in b) berechnete Wahrscheinlichkeit kleiner als 0,001 ist?

Da den Forschern unter den gegebenen Umständen die statistische Qualität der 5 Testreihen nicht gut genug ist, beschließen sie, die Ergebnisse zusammenzufassen. Sie handeln mit den Geldgebern aus, dass es für die Bewilligung weiterer Gelder ausreichen soll, wenn die Zahl der von den 150 Testpersonen Genesenen außerhalb des Bereichs der dreifachen Streuung um den Erwartungswert bei reiner Selbstheilung liegt.

f) Ermitteln Sie, wie viele Personen mindestens genesen sein müssen, damit weitere Gelder bewilligt werden.

g) Begründen Sie, warum die gefundene Grenze den Geldgebern eine hohe Sicherheit bietet.

h) Begründen Sie, warum ein derartiges Vorgehen bei nur 30 Testpersonen wenig Sinn machen würde.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Die Heilung der 30 Testpersonen erfolgt unabhängig voneinander, d.h. die Heilung oder Nichtheilung einer Person beeinflusst nicht die Heilung oder Nichtheilung der übrigen Testteilnehmer. Außerdem muss die Genesungswahrscheinlichkeit bei allen Testteilnehmern als gleich hoch eingeschätzt werden.</td><td></td><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Man kann die tatsächliche Wirksamkeit der Therapie durch das Ergebnis „Misserfolg“ in Frage stellen.

Und man kann reine Selbstheilungen durch das Ergebnis „Erfolg“ für Therapieerfolge halten. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist aus Tabellen der kumulierten Binomialverteilung abzulesen.

$P(X \geq 15 \mid p = 0{,}35) = 1 - \sum_{k=0}^{14} \binom{30}{k} \cdot 0{,}35^k \cdot 0{,}65^{30-k} \approx 0{,}0652$</td><td>5</td><td>12</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td><table><tr><td>p</td><td>0,4</td><td>0,5</td><td>0,6</td><td>0,7</td><td>1</td></tr><tr><td>P(„Erfolg“)</td><td>17,5%</td><td>57,2%</td><td>90,3%</td><td>99,4%</td><td>1</td></tr></table></td><td>5</td><td>8</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Die in b) berechnete Irrtumswahrscheinlichkeit 6,5% ist zwar größer als 5%, aber in der Nähe: Werden Therapieerfolge zu Unrecht behauptet, so werden hier bei den Kranken falsche Hoffnungen geweckt. Grundsätzlich ist der medizinische Bereich besonders empfindlich gegenüber Fehlentscheidungen, so dass bereits eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% oft zu hoch ist. Man könnte diese Irrtumswahrscheinlichkeit senken, indem man erst ab 16 Heilungen von „Erfolg“ spricht.

Werden Therapieerfolge zu Unrecht nicht erkannt, so wird diese Therapie nicht angewandt, die Forschungsgelder werden gestrichen und die Kranken leiden weiter. Erst bei $p = 0{,}7$ wird der Erfolg wirklich befriedigend erkannt.</td><td>5</td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Gesucht ist ein m mit
$P(X \geq m \mid p = 0{,}35) < 0{,}001$.

Dies wird ab $m = 19$ erfüllt. Man würde also erst bei 19 und mehr Genesenen die reine Selbstheilung verwerfen.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Es kann weiterhin von einer Binomialverteilung ausgegangen werden mit $p = 0{,}35$.

Damit ist die dreifache Streuung

$3 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 3 \cdot \sqrt{150 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65} \approx 17{,}52$

und die Grenze ist 52,5 + 17,52 = 70,02.

Also müssen mindestens 71 Testpersonen genesen sein.</td><td></td><td>15</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III
g)	Da hier der Stichprobenumfang hinreichend groß und das betrachtete Ereignis nicht selten ist, kann man die Sicherheit durch die Sicherheit bei einer Normalverteilung abschätzen. Diese ist aus einer Tabelle abgelesen 0,9987.			8
h)	Bei $n = 30$ ist die Streuung noch so groß, dass ein Therapieerfolg erst bei $9{,}5 + 3 \cdot \sqrt{30 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}65} \approx 17{,}3$, also bei 18 Genesenen akzeptiert würde.			7
	Insgesamt 100 BWE	15	64	21

Aufgabe 9: HIV-Test Gy, GS, TG, WG

Erschienen und diskutiert in der Zeitschrift Stochastik in der Schule, Bd.21 (2001), Heft 1, S.8 ff. in einem Aufsatz von Achim Quermann, vom Arbeitskreis bearbeitet und verändert.

Aufgabenstellung

Man geht davon aus, dass in der BRD von den ca. 40 Millionen sexuell aktiven Personen im Alter von 18-60 Jahren etwa 50 000 mit HIV infiziert sind.

a) In einem Labor wird eine anonyme Untersuchung von Blutproben auf das HIV-Virus vorgenommen. Die Proben entstammen einer für die oben beschriebene Personengruppe repräsentativen, sehr großen Stichprobe.
Unterstellen Sie vorerst, dass es einen 100% sicheren Test zum Nachweis einer HIV-Infektion gibt. Ist das Ergebnis des Test „HIV-infiziert", so spricht man von einem **positiven** Testergebnis.
Wie viele Proben müsste man mindestens in die Auswahl nehmen, um mit mehr als 99% iger Wahrscheinlichkeit wenigstens ein positives Testergebnis zu erhalten?

b) In den letzten Jahren wurde ein Test entwickelt, der zwar nicht sicher ist, für den aber immerhin Folgendes gilt:
- Wird eine Person untersucht, die tatsächlich infiziert ist, so ist die Wahrscheinlichkeit 99,8 % , dass der Test dann auch positiv reagiert.
- Wird hingegen eine nicht infizierte Person getestet, so ist die Wahrscheinlichkeit 99 %, dass der Test dann auch negativ reagiert.

Berechnen Sie das überraschende Ergebnis, dass eine als positiv getestete Person nur mit ca. 11% Wahrscheinlichkeit tatsächlich infiziert ist.

c) Lösen Sie den Aufgabenteil a) noch einmal, indem Sie nun den in b) beschriebenen Test zu Grunde legen. Erklären Sie den deutlichen Unterschied zwischen den Ergebnissen.

d) Das Ergebnis von Aufgabenteil b) verleitet zu der Aussage, dass der Test kaum eine diagnostische Aussagekraft habe. Beurteilen Sie diese Aussage, indem Sie die a-priori- und a-posteriori-Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Blutprobe eines Infizierten vergleichen.

e) Welche diagnostischen Schlussfolgerungen kann eine Person für sich ziehen, die sich bewusst einem solchen Test unterzogen hat, und ein „Test-positiv" als Ergebnis mitgeteilt bekommen hat?

f) Ein Pharmakonzern hat ein Medikament entwickelt, von dem er behauptet, dass der Krankheitsverlauf bei mindestens 40% der Aids-Erkrankten durch Einnahme dieses Medikaments nachweisbar positiv beeinflusst wird – wir sprechen von „Linderung". Um Zweifler zu überzeugen soll eine Untersuchung an 100 mit Aids erkrankten Patienten vorgenommen werden, die sich freiwillig bereit gefunden haben, das Medikament einzunehmen.
Bestimmen Sie aus der Sicht des Pharmaunternehmens eine Entscheidungsregel für einen stochastischen Signifikanztest auf dem 5 %-Niveau (mit „Test" ist hier nicht ein medizinischer Test gemeint, wie er z.B. in b) beschrieben wurde), mit dem es versuchen kann, seine Behauptung zu untermauern.
Bestimmen Sie für „wahre Werte der Linderungsquote" des Medikaments den Fehler 2. Art für die gefundene Entscheidungsregel. Legen Sie dazu im Bereich von 40% bis 60% in 10%-Schritten eine Wertetabelle an für die Linderungsquoten mit den zugehörigen Fehlern 2. Art. Interpretieren Sie diese Tabelle.
Benutzen Sie dabei die Integral-Näherungsformel von De Moivre/Laplace.

g) Welche Entscheidungsregel für die Untersuchung in f) werden Zweifler an der Behauptung des Pharmakonzerns festlegen?
Benutzen Sie auch hier die Integral-Näherungsformel von De Moivre/Laplace.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Wegen der großen Zahl der Grundgesamtheit kann die wiederholte Untersuchung von Blutproben als Bernoulli-Kette angesehen werden mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{5 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^7} = 0{,}125\%$. Die Wahrscheinlichkeit für „keinen Erfolg“ beträgt dann $(1-p)^n$. Wir lösen die Gleichung $(1-p)^n = 1\%$ $n = \frac{-2 \cdot \log 10}{\log 0{,}99875} \approx 3681{,}8$. Also müssen mindestens 3682 Blutproben untersucht werden.	10		
b)	Dies ist die „klassische“ Anwendung der Bayes-Formel: Es bezeichne: - K das Ereignis, dass die betreffende Person infiziert ist, - P_o das Ereignis, dass die betreffende Person ein positives Testergebnis hat. Gegeben sind: - $P(K) = 0{,}125\%$ (a-priori-Wahrscheinlichkeit) - $P(P_o\|K) = 99{,}8\%$ - $P(P_o\|\overline{K}) = 1\ \%$ Gesucht: $P(K\|P_o)$. $P(K \mid Po) = \frac{P(K) \cdot P(Po \mid K)}{P(K) \cdot P(Po \mid K) + P(\overline{K}) \cdot P(Po \mid \overline{K})}$ (Bayes-Formel) $\approx 11{,}1\%$	15		
c)	Ein positives Testergebnis kommt entweder durch einen Infizierten zustande oder durch einen Gesunden. Die 1. Pfadregel ergibt für den ersten Fall: $p_1 = P(K) \cdot P(Po \mid K) = 0{,}125\% \cdot 99{,}8\% \approx 0{,}1248\%$ und für den zweiten Fall: $p_2 = P(\overline{K}) \cdot P(Po \mid \overline{K}) = 99{,}875\% \cdot 1\% \approx 1\%$. Die Wahrscheinlichkeit für ein positives Testergebnis ergibt sich als Summe von p_1 und p_2. $P(Po) =: p_3 = p_1 + p_2 \approx 1{,}12\%$ (Satz über die totale Wahrscheinlichkeit). Wegen des sehr großen Anteils nicht infizierter Personen in der Stichprobe ergeben sich aus dem kleinen Testfehler von 1% (dass eine nicht infizierte Person positiv getestet wird) viele Fehldiagnosen dieser Art. p_1 entspricht ungefähr dem Wert p aus Aufgabe a), aber p_2 ist ungefähr 8 mal größer als p_1. Man erhält viel mehr „Positive“ durch Fehldiagnosen. Mit dem Wert von p_3 rechnen wir nun genauso wie in a): $n \approx 407{,}6$. Also müssen nur mindestens 408 Blutproben untersucht werden.		15	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>Ausgehend von der a-priori-Wahrscheinlichkeit von nur 0,125% für einen infizierten Patienten ist diese durch den positiven Test auf die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit von 11,1 % gestiegen.
Also ungefähr um den Faktor 90.
Aber, wenn vorher keinerlei Verdacht bestand, ist die diagnostische Qualität in der Tat gering, weil – wie in c) beschrieben - wegen der geringen a-priori-Wahrscheinlichkeit für Aids, die Quote der fälschlich Positiven so sehr ins Gewicht fällt.</td><td></td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Hier sind die Überlegungen anders: Da die Übertragungswege für Aids gut bekannt sind und die betreffende Person ihr Vorleben individuell in der Regel gut einschätzen kann, muss sie hier mit einer individuellen subjektiven a-priori-Wahrscheinlichkeit in die Bayes-Formel gehen.
Wenn sie z.B. jahrelang sexuell enthaltsam gelebt hat und keinen Blutaustausch hatte, wird sie diese als Null annehmen und die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit bleibt dann auch Null. Sie braucht nicht beunruhigt zu sein.
Wenn die Person aber „riskant“ gelebt hat, kann die a-priori-Wahrscheinlichkeit p, die sie nur schätzen kann, für sie erheblich höher als 0,125 % sein.
Zum Beispiel: bei p = 5 % ergibt sich dann schon eine a-posteriori-Wahrscheinlichkeit für eine Infektion von 84 % mit einem hohen traurigen diagnostischen Wert.</td><td></td><td></td><td>10</td></tr>
<tr><td>f)</td><td>Mit Y werde die Anzahl der Personen in der Stichprobe bezeichnet, bei denen eine lindernde Wirkung erkennbar sein wird.
Wir nehmen an, dass Y 100-p-binomialverteilt ist mit unbekanntem p.
Wir betrachten die Nullhypothese $H_0: p < 40\%$ mit der Gegenhypothese $H_1: p \geq 40\%$.
Wir werden die Nullhypothese ablehnen bei hinreichend großen Realisierungen von Y . Sagen wir falls Y > k .
Für den Fehler $\alpha(k)$ 1. Art gilt dann: $\alpha(k) \leq 1 - \sum_{i=0}^{k} B(100;0,4;i)$.
Wegen $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = \sqrt{24} > 3$ können wir die obige Summe approximieren durch $\Phi(\frac{k+0,5-40)}{\sqrt{24}})$.
Mit Hilfe einer Tabelle der GAUSSschen Integralfunktion oder durch Probieren mit dem Taschenrechner erhalten wir:
<table><tr><td>k</td><td>47</td><td>48</td></tr><tr><td>$\alpha(k) \leq$</td><td>6,3 %</td><td>4,1 %</td></tr></table>
Man sollte also die Nullhypothese ablehnen und der Behauptung des Pharmakonzerns Vertrauen schenken, falls $Y > 48$.
Für den Fehler $\beta(p)$ gilt dann: $\beta(p) = \sum_{i=0}^{48} B(100;p;i)$.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>
Wie oben nähern wir die Funktionswerte an und erhalten:

p	40 %	50 %	60 %
$\beta(p)$	96 %	38 %	1%

Wenn der Pharmakonzern zwar Recht hat, aber p nicht deutlich über 50 % liegt, wird es deswegen dennoch mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht zur gewünschten Ablehnung der Nullhypothese kommen.

Der Test ist nicht trennscharf. Dies wäre durch eine Erhöhung des Stichprobenumfanges zu verbessern.
</td><td></td><td>20</td><td>10</td></tr>
<tr><td>g)</td><td>
Die Zweifler werden versuchen, ein signifikantes Ergebnis zur Ablehnung der Nullhypothese $H_0: p \geq 40\%$ zu bekommen.
Dies wird bei hinreichend kleinen Realisierungen von Y geschehen. Sagen wir, falls $Y \leq m$.

Für den Fehler $\alpha(m)$ 1. Art gilt dann: $\alpha(m) \leq \sum_{i=0}^{m} B(100;0,4;i)$.

Mit den gleichen Methoden wie in f) erhalten wir:

m	31	32
$\alpha(m) \leq$	4,1 %	6,3 %

Man sollte also die Nullhypothese ablehnen und der Behauptung des Pharmakonzerns misstrauen, falls $Y \leq 31$.

(Dieser Test ist übrigens natürlich genau so wenig trennscharf wie der in f), d.h. bei Werten für p zwischen 20 % und 40 % werden die Zweifler mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht zu einem signifikanten Ergebnis kommen.)
</td><td></td><td>5</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>50</td><td>25</td></tr>
</table>

Aufgabe 10: Elektrische Bauteile TG, WG

Aufgabenstellung

Heimarbeiter H baut für eine Firma F in ein elektrisches Kleingerät jeweils eine Sicherung und einen Schalter ein.

a) Die Sicherungen werden mit einem Ausschussanteil von 10% hergestellt.

a.1) Aus der laufenden Produktion werden 15 Sicherungen zufällig entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten die folgenden Ereignisse ein?
A_1: Alle Sicherungen sind in Ordnung
A_2: Nur die erste, die fünfte und die letzte Sicherung sind defekt.
A_3: Genau drei Sicherungen sind defekt.
A_4: Die letzte entnommene Sicherung ist die dritte defekte.
A_5: Höchstens drei Sicherungen sind defekt.

a.2) Wie viele Sicherungen müssen der Produktion mindestens entnommen werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens eine defekte zu erhalten?

b) Auch die Schalter sind nicht alle einwandfrei. Sie sind mit einer Wahrscheinlichkeit p defekt.

b.1) Wie groß darf die Defektwahrscheinlichkeit p höchstens sein, damit unter 10 zufällig ausgewählten Schaltern mit mindestens 60% Wahrscheinlichkeit alle in Ordnung sind? (Zum Vergleich: $p = 0{,}05$. Verwenden Sie diesen Wert in den folgenden Teilaufgaben)

b.2) Die Schalter werden in Schachteln zu je 10 Stück verpackt und diese wieder in Kartons mit 10 Zehnerpacks.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich in einem Karton genau sechs Zehnerpackungen ohne defekte Schalter?

c) Die von H durch eine Sicherung und durch einen Schalter vervollständigten elektrischen Geräte arbeiten nur einwandfrei, wenn Sicherung und Schalter einwandfrei sind, wobei die Fehler von Sicherung und Schalter unabhängig voneinander auftreten. Verwenden Sie für die folgenden Teilaufgaben:

A: Eine Sicherung ist in Ordnung.
B: Ein Schalter arbeitet einwandfrei.
C: Ein elektrisches Gerät funktioniert.

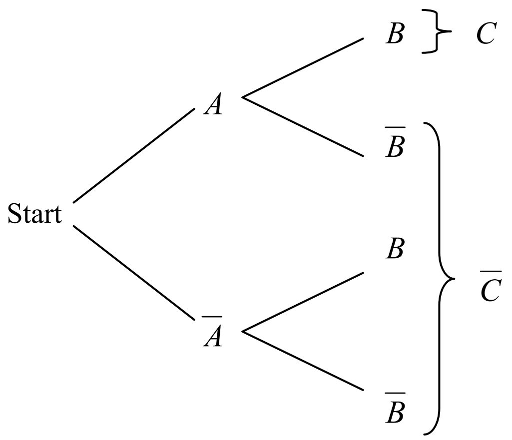
c.1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert ein elektrisches Gerät?

c.2) Ein elektrisches Gerät ist defekt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist
- eine Sicherung,
- nur eines der beiden Bauteile defekt?

c.3) In einem elektrischen Gerät ist nur ein Bauteil defekt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es die Sicherung?

d) Die elektrischen Kleingeräte werden verkaufsgerecht abgepackt und in einem Zentrallager gestapelt. Bei diesem Vorgang werden 0,1% der Geräte beschädigt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthalten 1.000 verpackte und im Zentrallager gestapelte Kleingeräte höchstens ein so beschädigtes Exemplar?

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	1. $p = 0{,}1;\ q = 0{,}9$ $p(A_1) = 0{,}9^{15} = 0{,}206$ $p(A_2) = 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^{12} = 0{,}00028$ $p(A_3) = \binom{15}{3} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^{12} = 0{,}129$ $p(A_4) = \binom{14}{2} \cdot 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^{12} = 0{,}026$ $p(A_5) = B_{0,1}^{15}(Z \leq 3) = \sum_{i=0}^{3} B(15;0;i) = 0{,}944$	5	10	5
	2. $p(\text{“mindestens eine”}) = 1 - (\text{“keine”})$ $1 - 0{,}9^n \geq 0{,}99$ $-0{,}9^n \geq -0{,}01$ $0{,}9^n \leq 0{,}01$ $n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}9}$ $n \geq 44$		5	5
b)	1. $(1-p)^{10} \geq 0{,}6$ $1-p \geq \sqrt[10]{0{,}6}$ $p \leq 1 - 0{,}6^{\frac{1}{10}}$ $p \leq 0{,}05$ 2. $p(Z=6) = \binom{10}{6} \cdot 0{,}6^6 \cdot 0{,}4^4 = 0{,}251$	5	10	5
c)				

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	1. $p(C) = A \cap B = p(A) \cdot p(B)$ unabhängig. $p(C) = 0{,}855$ 2. $p_{\overline{C}}(\overline{A}) = \dfrac{p(\overline{A} \cap \overline{C})}{p(\overline{C})} = \dfrac{0{,}1}{0{,}145} = 0{,}69$ $p_{\overline{C}}((\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) = \dfrac{0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}9 \cdot 0{,}05}{0{,}145} = 0{,}966$ 3. $p_{(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})}(\overline{A}) = \dfrac{0{,}1 \cdot 0{,}95}{0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}9 \cdot 0{,}05} = 0{,}697$	10	20	10
d)	$p = 0{,}001$; $n = 1000$ Poisson: $\mu = n \cdot p = 1$ $p_1(Z \leq 1) = 0{,}73576$ aus Tabelle			10
	Insgesamt 100 BWE	20	45	35