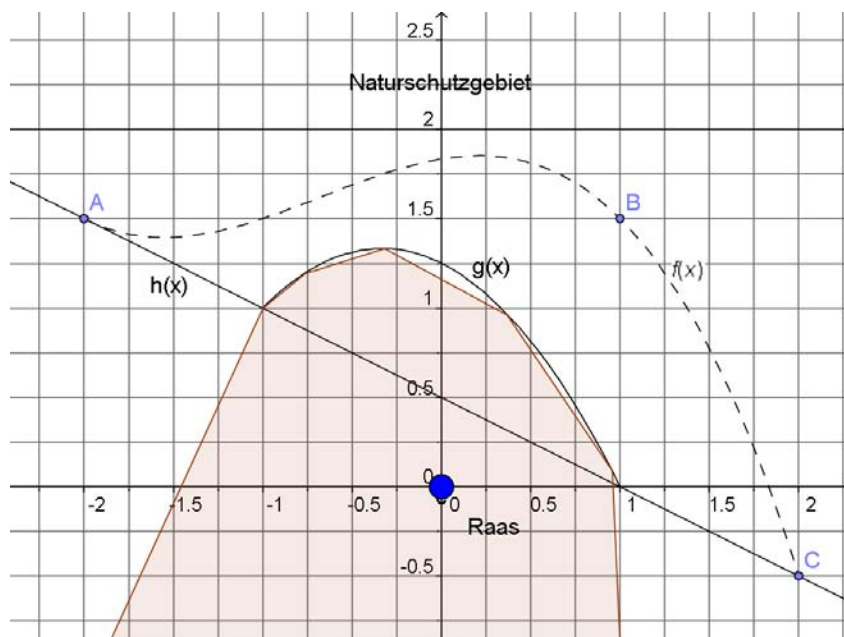


Aufgabensammlung

von Klausuraufgaben

- Anregungen für den Mathematikunterricht -



Bei den Aufgaben in dieser Aufgabensammlung handelt es sich um für das dezentrale Abitur 2006 bei den Bezirksregierungen eingereichte und dort genehmigte Aufgaben. Die Aufgaben sind in Bezug auf ihren Umfang und ihre Schwierigkeit für Kurse optimiert, die die Kurslehrerinnen und Kurslehrer unterrichtet haben; damit haben sie einen deutlichen Bezug zu jeweils einer konkreten Lerngruppe. Die Originalformatierungen sind weitgehend beibehalten. Wir bedanken uns herzlich bei den Kolleginnen und Kollegen, die diese Aufgaben erstellt haben.

Die Originalaufgaben wurden für diesen Reader überarbeitet. Insbesondere wurden sie gekürzt, wenn Teile nicht zu den Vorgaben für das Zentralabitur passen. Es wurde darauf geachtet, dass die verbindlich vorgegebenen Operatoren in den Aufgabenstellungen verwendet werden; ggf. wurde diese ergänzt.

Die Aufgaben in diesem Reader dienen als Anregung für den Unterricht und decken weitgehend alle curricularen Aspekte der Vorgaben ab. Die Sammlung hat nicht den Anspruch, Aufgaben für das Zentralabitur 2007 in Bezug auf ihre Schwierigkeit und ihren Umfang abzubilden. Sie illustriert aber das Spektrum möglicher Anforderungen und möglicher Formulierungen für Aufgaben (unter Verwendung der Operatoren) und Teilaufgaben. Zudem berücksichtigt sie die zulässigen Werkzeuge wissenschaftliche Taschenrechner WTR(ohne oder mit Graphikfähigkeit) oder Computeralgebrasysteme (CAS).

In der folgenden Tabelle wird eine Übersicht über die einzelnen Aufgaben gegeben:

Nr.	Sachgebiet	Kursart	TR	Thema	Titel	Seite
1	A	Gk	CAS	e-Funktion	Brücke großer Belt	1
2	A	Gk	CAS	e-Funktion	Forellenzucht	2
3	A	Gk	CAS	ganzrat. Funktion	Verkehrszählung	4
4	A	Gk	CAS	ganzrat. Funktion	Tunnel	6
5	A	Gk	WTR	kombinierte Funktion	Graph f , f' F	8
6	A	Gk	WTR	e-Funktion	Arzneimittelkonzentration	9
7	A	Gk	WTR	ganzrat. Funktion	LipNature	10
8	A	Gk	WTR	kombinierte Funktion	Kombi	11
9	A	Gk	WTR	kombinierte Funktion	Stausee	12
10	A	Gk	WTR	kombinierte Funktion	Wellnessliege	13
11	A	Gk	WTR	ganzrat. Funktion	Umgehungsstraße	15
12	A	Lk	CAS	gebr.-rat. F-Schar	Funktionenschar	16
13	A	Lk	WTR	ganzrat. F-Schar	2 Flächenstrategien	17
14	A	Lk	WTR	e-Funktion	Fischbestand	18
15	A	Lk	WTR	ganzrat. F-Schar	Olympiaschanze Garmisch	19
16	LAG	Gk	WTR	vektorielle Geometrie	Tennis	21
17	LAG	Gk	WTR	Übergangsmatrizen	Insektenpopulation	23
18	LAG	Gk	WTR	vektorielle Geometrie	vektorielle Geometrie	24
19	LAG	Lk	CAS	Abbildungsmatrizen	Abbildungen	25
20	LAG	Lk	CAS	Übergangsmatrizen	Krankheit	26
21	LAG	Lk	WTR	vektorielle Geometrie	Flugbahnen	28
22	LAG	Lk	WTR	Übergangsmatrizen	Ödnis im Osten	29
23	LAG	Lk	WTR	Übergangsmatrizen	Bevölkerungsentwicklung	30
24	LAG	Lk	WTR	vektorielle Geometrie	Dreieckspyramide	31
25	LAG	Lk	WTR	Übergangsmatrizen	Münzwanderung	32
26	St	Gk	CAS	ohne Test	Straßenbahn	33
27	St	Gk	WTR	mit Test	Spielautomat Lucky Fruit	35
28	St	Gk	WTR	mit Test	Rußfilter	36
29	St	Lk	CAS	ohne Test	Telefonvertrag	37
30	St	Lk	WTR	ohne Test	Onliner-Atlas	39
31	St	Lk	WTR	ohne Test	Kinderglück	41

Aufg.-Nr.: 1	Bereich: e-Funktionen	Kursart: GK	CAS
--------------	-----------------------	-------------	-----

Brücke Großer Belt

Mitte 1998 wurde in Dänemark eine Verbindung über den Großen Belt eingeweiht. Hauptbestandteil ist die Ostbrücke – eine 6790 Meter lange Hängebrücke – mit einer Spannweite von 1624 m zwischen zwei Pfeilern. Die Durchfahrtshöhe für den Schiffverkehr beträgt 65m, die Spitzen der Pfeiler bilden mit 254 m Höhe über dem Meeresspiegel die größte Erhebung Dänemarks.

(Informationen aus www.storebaelt.dk).



Der tiefste Punkt des Kabels zwischen den beiden Pfeilerspitzen liegt ca. 3m über der Fahrbahn.
(Quelle der Fotos: www.brueckenweb.de)

- In einem geeigneten Koordinatensystem lässt sich die Lage des Kabels zwischen den beiden Pfeilern durch eine Parabel darstellen. Ermitteln Sie eine mögliche Funktionsgleichung.
- Das Kabel lässt sich annähernd auch durch den Graphen der Funktion g mit $g(x) = a \cdot (e^{b \cdot x} + e^{-b \cdot x})$ mit $a, b > 0$ beschreiben. Bestimmen Sie a und b .

Als mögliche Funktionsterme kann man in (a) und (b)

$$f(x) = 0,000282 \cdot x^2 + 3 \text{ und } g(x) = 1,5 \cdot (e^{0,00596 \cdot x} + e^{-0,00596 \cdot x})$$

erhalten.

- Stellen Sie mit Hilfe des CAS beide Graphen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar, skizzieren Sie den Verlauf in Ihren Klausurunterlagen und vergleichen Sie beide Modellierungen.
- Berechnen Sie in beiden Modellen die Steigung des Kabels an den Pfeilerspitzen und vergleichen Sie diese mit dem Verlauf des Kabels auf dem Foto.
- Die senkrechten Tragseile haben einen Abstand von 27 m. Berechnen Sie in beiden Modellen die Länge des markierten Tragseiles und ermitteln Sie zum Vergleich die ungefähre Länge des Seiles Nr. 7 auf dem Foto bei Aufgabenteil (d).
- Ermitteln Sie rechnerisch, an welcher Stelle sich bei der Berechnung der Längen der senkrechten Tragseile die größten Unterschiede bei beiden Modellen ergeben.



Aufg.-Nr.: 2	Bereich: e-Funktion	Kursart: GK	CAS
--------------	---------------------	-------------	-----

Forellenzucht

- In einer Forellenzuchtanstalt im Sauerland wurde bei gleichaltrigen Forellen die durchschnittliche Länge ermittelt. Die Tabelle zeigt einen Teil der gewonnenen Daten:

Alter (in Monaten)	0	2	5	8	10
Länge (in cm)	0,2	9,8	17,8	21,6	22,9

- Ausgewachsene Forellen erreichen nach zwei Jahren eine durchschnittliche Länge von 25 cm.

- a) Begründen Sie, warum man beim Wachstum von Forellen von begrenztem Wachstum sprechen kann.
- b) Ermitteln Sie aus den Daten eine Funktion f_1 , die die durchschnittliche Länge von Forellen zur Zeit t beschreibt und skizzieren Sie den Graphen auf dem vorbereiteten Arbeitsblatt.

(zur Kontrolle: Man erhält näherungsweise $f_1(t) = 25 - \frac{124}{5} \cdot e^{-0,247x}$)

- c) Berechnen Sie auf der Grundlage von f_1 die durchschnittliche Wachstumsrate für den 4. Monat.

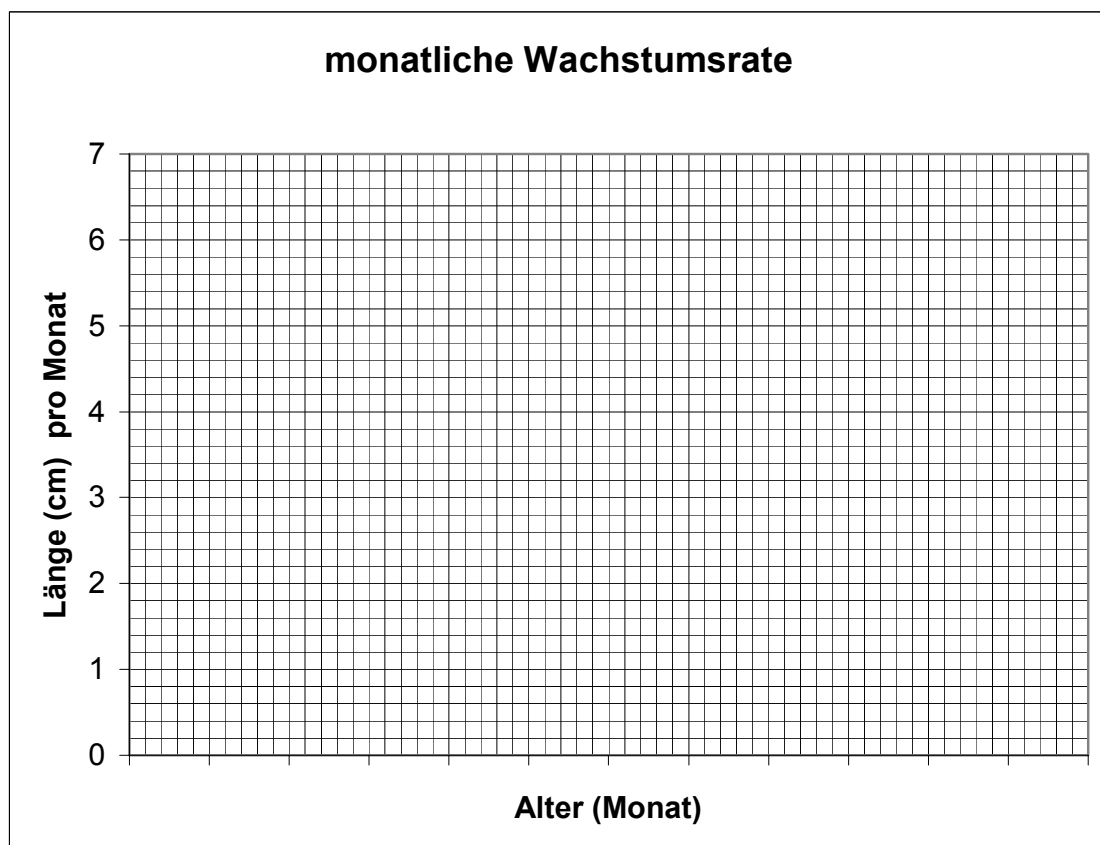
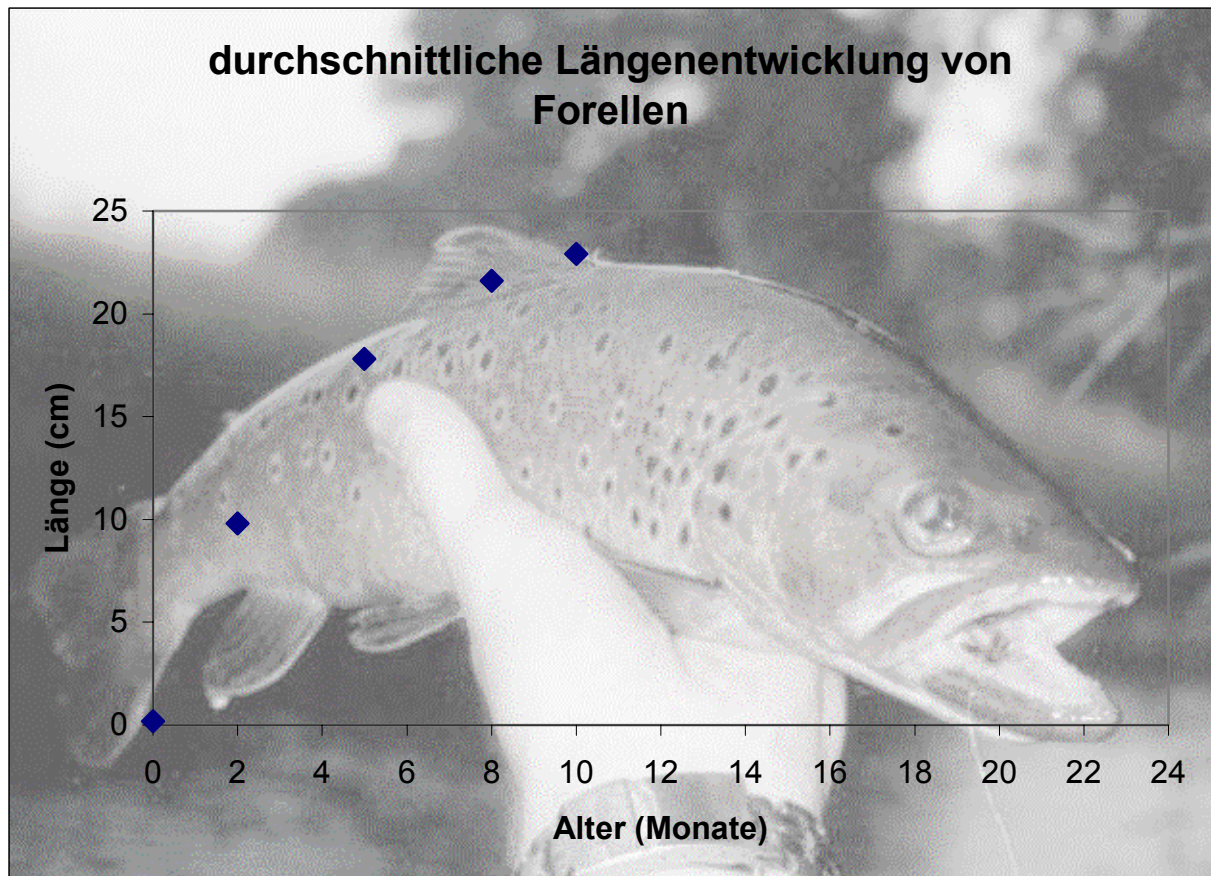
- In einer Versuchsanstalt im Siegerland hat ein Biologe eine einzelne Forelle beobachtet und jeweils das Wachstum pro Monat aufgezeichnet. Folgende Daten sind vorhanden:

Alter (in Monaten)	1	4	6	8
Längenwachstum pro Monat (in cm)	5,5	2,6	1,6	1

- d) Bestimmen Sie für die Forelle aus dem Siegerland eine ganzrationale Funktion h_1 , die jedem Monat die Wachstumsrate zuordnet. Der zugehörige Graph bis zum 24. Monat ist bereits auf dem zugehörigen Arbeitsblatt eingezeichnet.
- e) Machen Sie einen exponentiellen Ansatz (h_2) und zeichnen Sie den Graphen in dasselbe Koordinatensystem. Falls Sie die Aufgabe nicht lösen können, arbeiten Sie mit $h_2(x) = 7 \cdot e^{-0,2497x}$ weiter.
- f) Untersuchen Sie die Güte der beiden Modellierungsansätze.
- g) Rechnen Sie auf der Grundlage von h_2 nach, dass der Fisch aus dem Siegerland ein großes Exemplar war.
- h) Bestimmen Sie eine Funktion h_3 , die die Länge des Fisches aus dem Siegerland zur Zeit t beschreibt. Gehen Sie dabei davon aus, dass seine Länge beim Schlüpfen auch 0,2 cm gewesen ist.

Aufg.-Nr.: 2	Bereich: e-Funktion	Kursart: GK	CAS
--------------	---------------------	-------------	-----

Arbeitsblatt zur Aufgabe Forellenzucht



Aufg.-Nr.: 3	Bereich: ganzrat. Funktion	Kursart: GK	CAS
--------------	----------------------------	-------------	-----

Verkehrszählung am Hauptbahnhof

Im Zusammenhang mit der Diskussion um die Feinstaubbelastung am Graf-von-Galen-Ring in Hagen wurden auch umfangreiche Verkehrszählungen durchgeführt.

Ich habe die meisten Zahlen, die bei der Diskussion im Umweltausschuss genannt wurden, nicht behalten, aber an folgende Datenlage erinnere ich mich noch: An einen Wochentag hatten wir um 0 Uhr morgens eine Verkehrsdichte von 400 Kfz/h, der höchste Wert lag um 8 Uhr bei 2100 Kfz/h. Danach sank die Verkehrsdichte bis 14 Uhr auf 1600 Kfz/h und stieg dann wieder auf ein Zwischenhoch um 17 Uhr.

- Skizzieren Sie auf dem beiliegenden Arbeitsblatt (obere Grafik) auf der Basis der obigen Angaben einen möglichen Verlauf der Funktion, die die Verkehrsdichte am Graf-von-Galen-Ring beschreibt.
- Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion, die die Verkehrsdichte (in Kfz/h) in Abhängigkeit von der Tageszeit (in h) gemäß den oben angegebenen Daten modelliert.

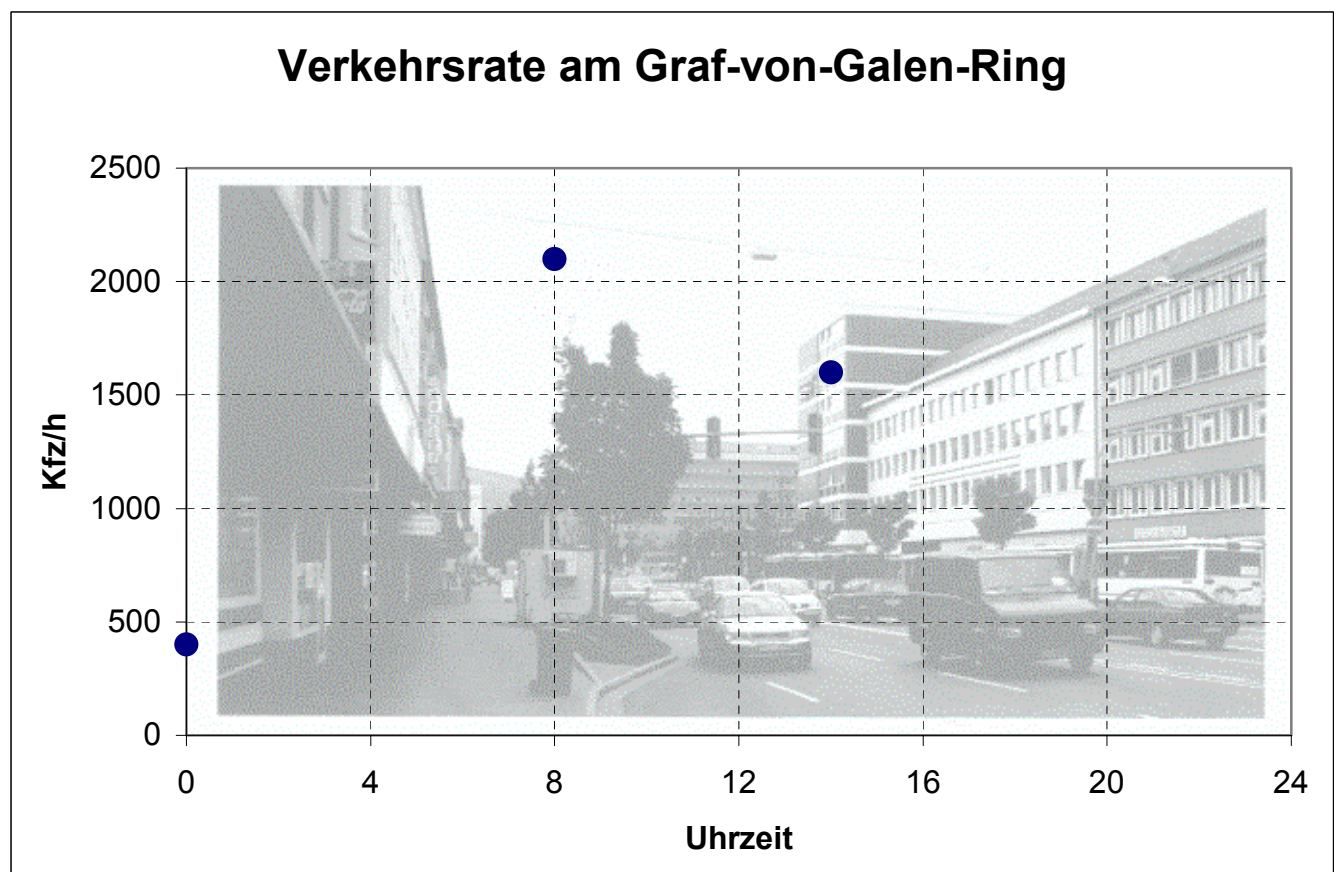
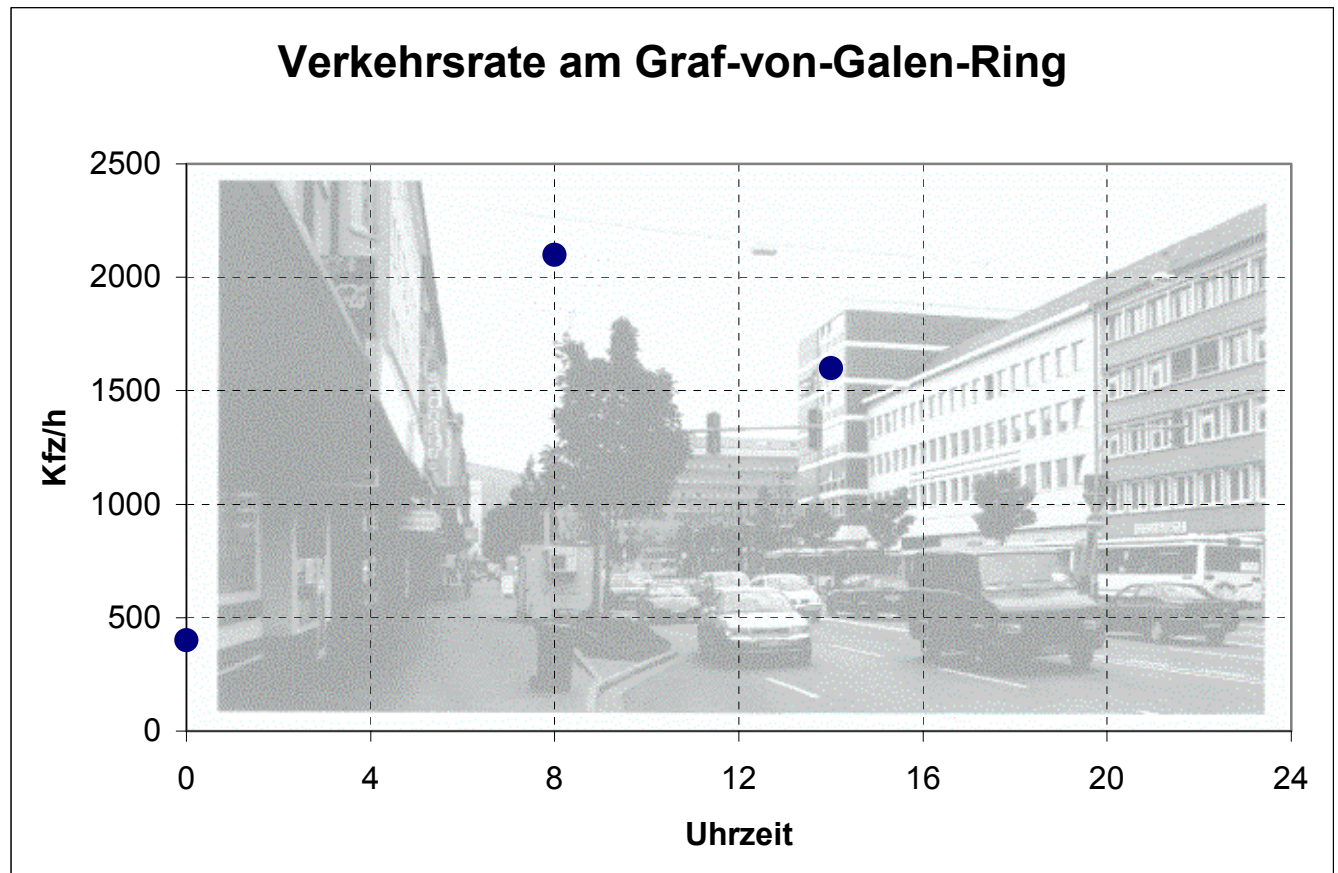
Falls Sie die Funktion nicht bestimmen können, arbeiten Sie mit $f(x) = -0,0466x^5 + 2,3167x^4 - 40,07x^3 + 265,2x^2 - 340x + 400$ weiter.

Fertigen Sie eine Skizze der Funktion auf dem beiliegenden Arbeitsblatt (untere Grafik) an.

- Bestimmen Sie
 - die höchste vorkommende Verkehrsdichte des Tages,
 - die Uhrzeit, zu der die Verkehrsdichte am schnellsten zunimmt.
- Zeigen Sie, dass die Funktion mindestens in einem Bereich den Sachzusammenhang nicht beschreibt. Ermitteln Sie für diesen Bereich eine Ersatzfunktion g , die folgende Bedingungen erfüllen soll: Um 18.00 soll der Funktionswert und die Steigung genau so groß sein, wie bei der Funktion f aus Teilaufgabe a), und um 24.00 soll wieder eine Verkehrsdichte von 400 Kfz/h erreicht sein. Zeichnen Sie die Ersatzfunktion in einer anderen Farbe ebenfalls auf dem Arbeitsblatt ein.
- Aus früheren Zählungen weiß man, dass die durchschnittliche tägliche Verkehrsstärke DTV (= Anzahl der Fahrzeuge, die die Straße innerhalb 24 Stunden befahren) am Graf-von-Galen-Ring bei 34000 Kfz liegt. Veranschaulichen Sie den DTV-Wert auf dem Arbeitsblatt und überprüfen Sie rechnerisch, ob der Wert durch die beiden Funktionen f (bis 18.00 h) und g (ab 18.00 h) gut modelliert wird.
- Berechnen Sie den prozentualen Anteil der Fahrzeuge, die nach der Modellierung schon bis 9.00 h den Graf-von-Galen-Ring befahren haben.

Aufg.-Nr.: 3	Bereich: ganzrat. Funktion	Kursart: GK	CAS
--------------	----------------------------	-------------	-----

Arbeitsblatt zur Aufgabe „Verkehrsbelastungen am Graf-von-Galen-Ring“



Aufg.-Nr.: 4	Bereich: ganzrat. Funktion	Kursart: GK	CAS
--------------	----------------------------	-------------	-----

Tunnel

Nach dem nebenstehenden Foto soll ein Tunnel errichtet werden.

Man interessiert sich für die Gestaltung des Eingangs (Portal), sucht eine geeignete Funktion, die den gekrümmten Verlauf möglichst passend beschreibt.

Betrachten Sie nun die beigegefügte Skizze auf dem separaten Blatt. Dazu hat man die 6 Punkte A bis F mit ihren Koordinaten ermittelt. Sie dienen als Rechenbasis.



- a) Mit A, D und F erstellt man eine Parabel (2. Ordnung). Bestimmen Sie den Term geeignet, lösen Sie Ihre Gleichungen per Hand.
(zur Kontrolle: $f(x) = -0.07x^2 + 0.75x + 8$)
- b) Zur weiteren Diskussion der Ingenieure stehen eine Funktion 3. Grades (mit A, C, D und F) sowie eine Funktion 4. Grades (mit A, C, D, E und F) zur Auswahl.
Erstellen Sie für jede Funktion die jeweiligen Bestimmungsgleichungen und bestimmen Sie die gesuchten Terme der beiden Funktionen.

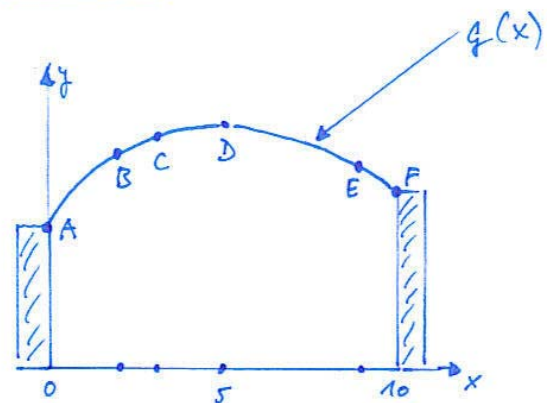
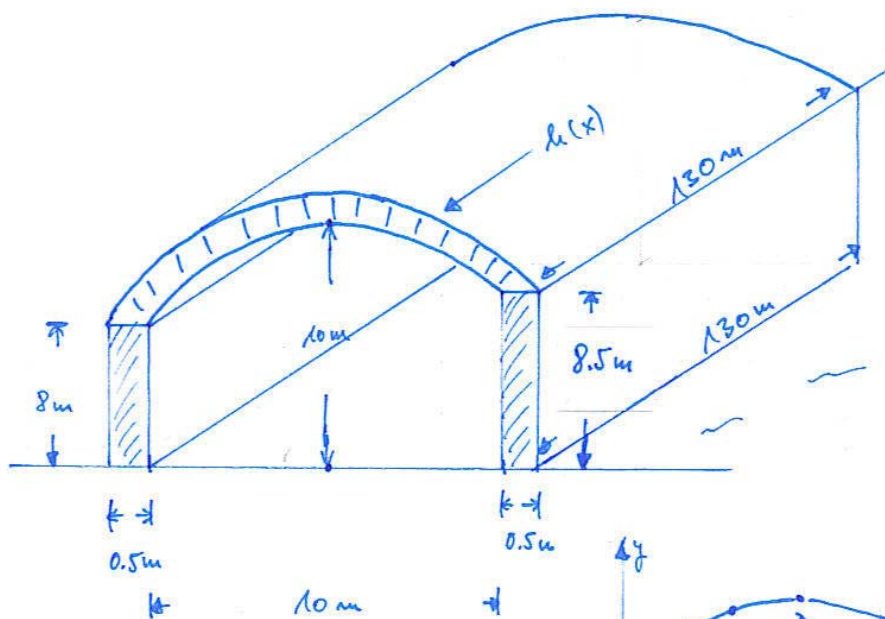
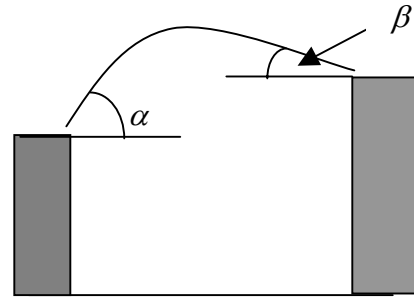
(zur Kontrolle: $g(x) = -\frac{1}{350}x^3 - \frac{19}{700}x^2 + \frac{17}{28}x + 8$;

$$h(x) = \frac{101}{50400}x^4 - \frac{109}{2800}x^3 + \frac{8227}{50400}x^2 + \frac{103}{336}x + 8$$

- c) Übertragen Sie die drei mit Hilfe des CAS ermittelten Graphen als Skizze (Unterschiede sollen deutlich werden!) in Ihre Unterlagen.
- d) Der Tunnel soll seine größte Höhe in der Mitte der Fahrbahn haben. Bestimmen Sie diejenige Funktion (f, g oder h), die diese Bedingung am „genauesten“ erfüllt. Erläutern Sie Ihr Verfahren.
- e) Man entscheidet sich für g als Randfunktion: Bestimmen Sie das Luftvolumen, das dann der 130 m lange Tunnel hat.
- f) Nun sucht man den oberen Rand des Tunnels ($h(x)$) als „Parallele“ zu g:

$$h(x) = g(x) + c.$$
h ist also „etwas“ nach oben verschoben im Vergleich zu g.
Der obere Rand soll aber – wie in der Skizze zu sehen - rechts und links auf den $\frac{1}{2}m$ breiten Mauern aufliegen. Geben Sie ein Verfahren an, um den möglichst exakten Term für h zu finden. (Verwenden Sie nur Zehntel-Veränderungen für den Wert von c).
- g) Sollten Sie bei f) kein Ergebnis haben, so verwenden Sie für den oberen Rand die Verschiebung $c=0.4$.
Berechnen Sie für diesen Fall das Betonvolumen für den gewölbten Tunneldeckel.

h) Die bisher betrachteten Funktionen f , g und h erscheinen den Ingenieuren nicht geeignet, weil durch ihre Form der Betondeckel „zu flach“ auf den Seitenmauern aufliegt. Geben Sie die Winkelgrößen für α und β an, die bisher durch die drei Funktionen f , g und h erzeugt wurden.



A(0/8) B(2/9) C(3/9.5)
D(5/10) E(9/8.75) F(10/8.5)

Alle Angaben in Metern (m)!

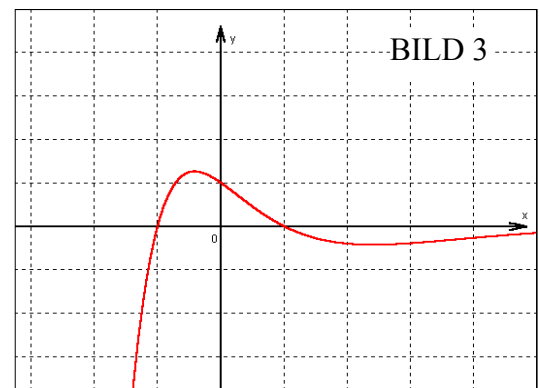
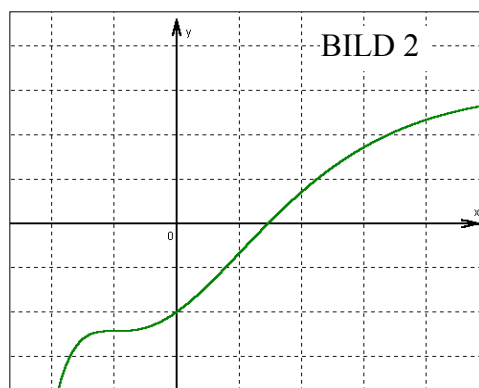
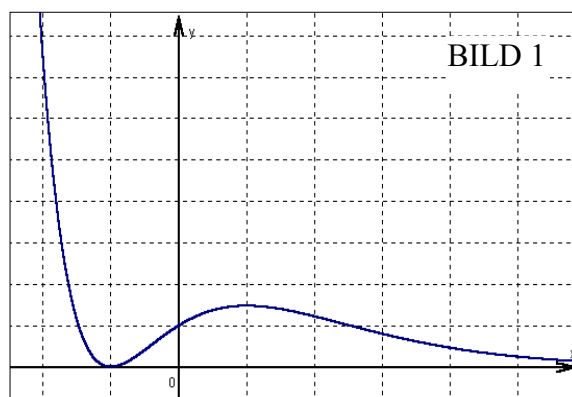
Aufg.-Nr.: 5	Bereich: kombinierte Funktion	Kursart: GK	WTR
--------------	-------------------------------	-------------	-----

Graph f, f', F

Gegeben ist die Exponentialfunktion f mit der Gleichung

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-x} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

- a) Bestimmen Sie für die Funktion f die Achsendurchschlagspunkte, das Verhalten im Unendlichen und die relativen Extrema.
- b) Gegeben sind die Graphen der Funktion f, der Graph ihrer Ableitungsfunktion f' und der Graph einer Stammfunktion F von f. Begründen Sie *möglichst vielseitig*, dass nur Bild 1 den Graphen von f darstellen kann. Entscheiden Sie, welcher Graph f' und welcher Graph F darstellt und begründen Sie Ihre Entscheidung!



- c) Der Graph von f schließt im 1. Quadranten mit der x-Achse eine Fläche ein.
1. Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = (-x^2 - 4x - 5) \cdot e^{-x} + 3$ eine Stammfunktion zu f ist.
 2. Berechnen Sie den Inhalt der oben beschriebenen Fläche.
 3. Zeichnen Sie in das Bild mit dem Graphen der Funktion f den Graphen der Funktion g mit $g(x) = e^{-x}$ ein. Dieser Graph teilt die in c2 berechnete Fläche. Berechnen Sie das Teilverhältnis.
- d) Gegeben ist das Integral $\int_{-2}^b (f(x) - g(x)) dx$. Für immer größer werdende Werte von b nähert sich der Integralwert dem Wert 0. Interpretieren Sie dieses Ergebnis hinsichtlich der von den Graphen der Funktionen f und g *insgesamt* eingeschlossenen Fläche?

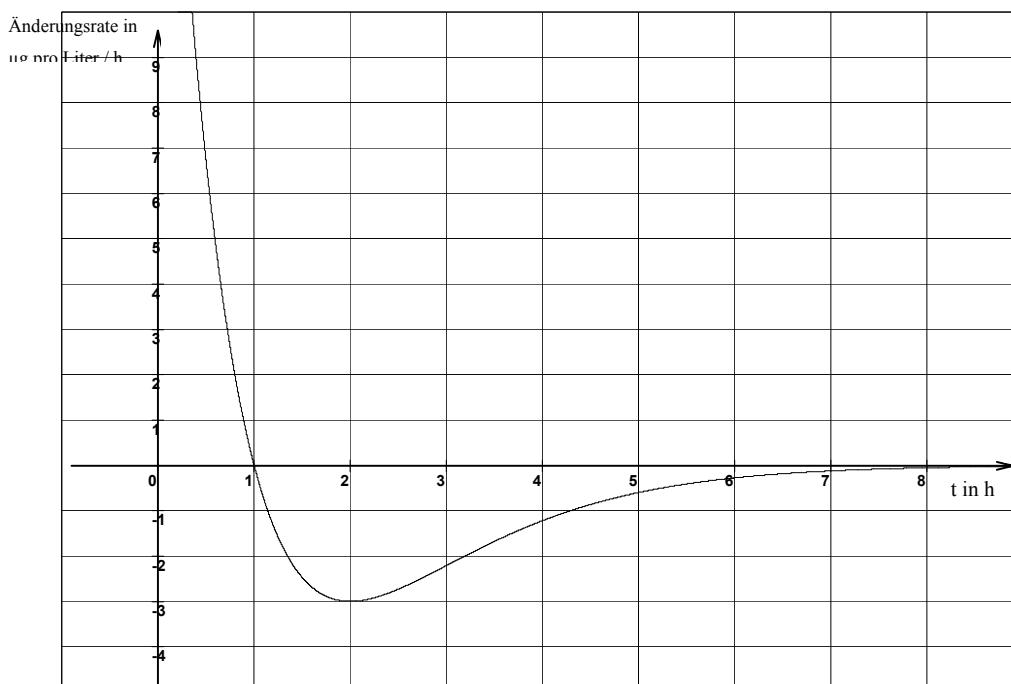
Aufg.-Nr.: 6	Bereich: e-Funktion	Kursart: GK	WTR
--------------	---------------------	-------------	-----

Arzneimittelkonzentration

Bei einer Arznei, z.B. einer Tablette, steht die Wirkung (z.B. Schmerzlinderung o.ä.) in direktem Zusammenhang mit der Konzentration des in der Arznei enthaltenen Wirkstoffes im Blut, d.h., bei hoher Konzentration des Wirkstoffes verspürt der Patient eine intensive Wirkung. Die Konzentration des Wirkstoffes im Blut wird in μg pro Liter angegeben.

Die nachfolgende Graphik zeigt die Änderungsrate der Konzentration in μg pro Liter je Stunde in Abhängigkeit von der Zeit t in h.

Dabei ist t die Zeit in h seit Beginn der Einnahme ($t = 0$).



- Geben Sie die Zeitintervalle an, in denen die Wirksamkeit zunimmt und die Zeitintervalle, in denen die Wirksamkeit abnimmt. Begründen Sie Ihre Aussagen.
- Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Konzentration des Wirkstoffes am größten ist und begründen Sie Ihr Ergebnis.
- Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Abnahme der Konzentration am größten ist und begründen Sie Ihr Ergebnis.
- Die Wirksamkeit der Arznei wird durch die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(t) = 3t \cdot e^{2-t}; \quad t \geq 0$$

beschrieben. Dabei beschreibt $f(t)$ die Konzentration des Wirkstoffes im Blut (gemessen in μg pro Liter) zur Zeit t (gemessen in h seit der Einnahme). Weisen Sie unter Verwendung von f rechnerisch nach, dass Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe b korrekt ist. (Falls Sie b nicht gelöst haben, berechnen Sie nun den in b gesuchten Zeitpunkt). Berechnen Sie auch die Höhe der Konzentration zu diesem Zeitpunkt.

- Begründen Sie, dass das Vorzeichen von f' durch den Term $3 - 3t$ bestimmt wird, und erklären Sie mit Hilfe dieser Aussage nachträglich den Verlauf des abgebildeten Graphen.
- Beschreiben Sie den zeitlichen Verlauf der Wirksamkeit der Arznei.

Aufg.-Nr.: 7	Bereich: ganzrat. Funktion	Kursart: GK	WTR
--------------	----------------------------	-------------	-----

Lipnature

Die Kosmetikfirma „lipnature“, die sich auf die Produktion von Lippenpflegeprodukten spezialisiert hat, möchte ein neues Firmenlogo entwerfen. Die PR-Abteilung der Firma schlägt dem Vorstand vor, dem neuen Firmenlogo die Form eines „Kussmundes“ zu verleihen.

Die Umrandung der Oberlippe entspricht dem Graphen einer achsensymmetrischen Funktion vierten Grades (f_1), welche an der Stelle $x_0 = 4$ eine Nullstelle und an der Stelle $x_E = -2$ ein relatives Extremum besitzt. Zudem schneidet der Graph die y-Achse an der Stelle $y_s = 2$.

Für die Randlinie der Unterlippe soll der Graph einer quadratischen Funktion f_2 benutzt werden, die durch die Funktionsgleichung $f_2(x) = \frac{1}{8}x^2 - 2$ gegeben ist.

- a) Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion f_1 , welche die Randlinie der Oberlippe beschreibt.

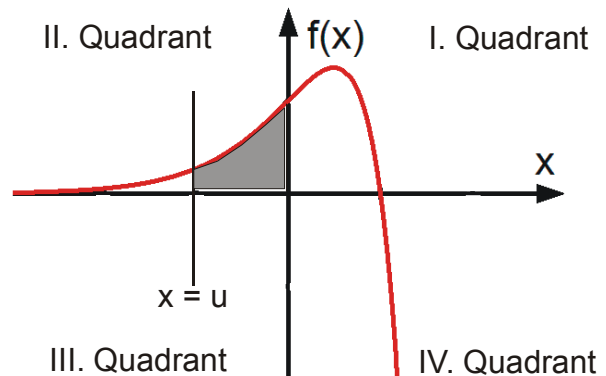
(Zur Kontrolle: $f_1(x) = -\frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + 2$.)

- b) Bestimmen Sie die gemeinsamen Schnittpunkte der Funktionen f_1 und f_2 .
- c) Bestimmen Sie alle relativen Extrempunkte sowie Wendepunkte der Funktion f_1 .
- d) Skizzieren Sie das Firmenlogo.
- e) Berechnen Sie den Flächeninhalt des „Kussmundes“.
- f) Die PR-Abteilung der Kosmetikfirma schlägt vor, den Firmennamen „lipnature“ als Schriftzug so in den Kussmund zu integrieren, dass er in einem Rechteck zwischen der x-Achse und der Unterlippenrandlinie erscheint. Berechnen Sie die Maße des entsprechenden Rechtecks maximalen Flächeninhalts und geben Sie zudem die Flächenmaßzahl an.
- g) Die Fläche des in Teilaufgabe f) ermittelten Rechtecks reicht nicht aus, um den Firmennamen angemessen darin unterbringen zu können. Nun soll die Gleichung, welche die Unterlippenrandlinie beschreibt, derart verändert werden, dass die Nullstellen bei $x_0 = \pm 4$ erhalten bleiben, aber die Lage des Scheitelpunkts auf der y-Achse variieren kann. Zeigen Sie, dass alle möglichen Unterlippenrandlinien durch eine allgemeine Funktion f_k mit $f_k(x) = kx^2 - 16k$ ($k \in \mathbb{R}^{>0}$) wiedergegeben werden.

Aufg.-Nr.: 8	Bereich: kombinierte Funktion	Kursart: GK	WTR
--------------	-------------------------------	-------------	-----

Innermathematische Aufgabe

In der Abbildung rechts ist der Graph der Funktion f zu $f(x) = (1-x) \cdot e^{2x}$ dargestellt.



- Berechnen Sie die Nullstelle, den Extrem- und den Wendepunkt von f . Untersuchen Sie das Verhalten von f für $x \rightarrow \infty$ und für $x \rightarrow -\infty$.
Zur Kontrolle: $f''(x) = -4xe^{2x}$.
- Zeigen Sie, dass F mit $F(x) = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) \cdot e^{2x}$ eine Stammfunktion von f ist.
- Bestimmen Sie die Maßzahl der Fläche, die der Graph von f mit den Koordinatenachsen im I. Quadranten einschließt.
- Der Graph von f schließt im II. Quadranten mit den Koordinatenachsen und der Geraden zu $x = u$, $u < 0$, eine Fläche ein, vgl. obige Abbildung. Bestimmen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts in Abhängigkeit von u . Ermitteln Sie den Wert der Maßzahl für $u \rightarrow -\infty$ und interpretieren Sie diesen Wert geometrisch.
- Ein Punkt P bewegt sich im I. Quadranten auf dem Graphen von f . Die Parallelen zu den Koordinatenachsen durch P und die beiden Koordinatenachsen bilden ein Rechteck. Bestimmen Sie den maximalen Flächeninhalt eines solchen Rechtecks.

Aufg.-Nr.: 9	Bereich: kombinierte Funktion	Kursart: GK	WTR
--------------	-------------------------------	-------------	-----

Stausee

Ein Stausee ändert seine Wassermenge. Zunächst wird er mit Wasser gefüllt. Die Zulaufratenfunktion ist gegeben

durch $z(x) = (x^2 - 10x + 24)e^{\frac{1}{2}x}$. Der Graph von z ist rechts abgebildet.

Dabei wird x in Tagen und $z(x)$ in tausend Kubikmeter pro Tag angegeben.

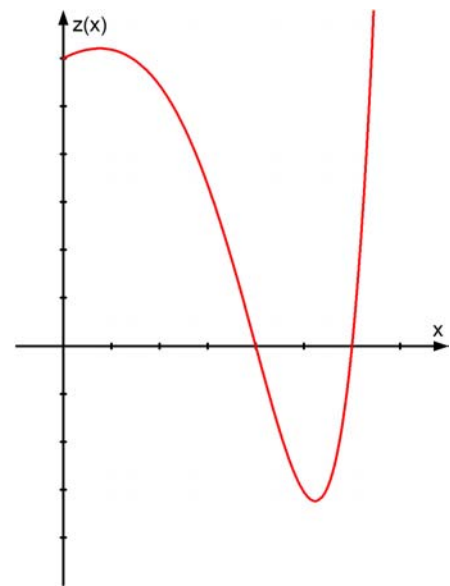
Betrachtet wird das Intervall $[0;6,5]$, d.h.: $0 \leq x \leq 6,5$.

Hinweis: Eine negative Zulauftrate bedeutet, dass Wasser aus dem Stausee herausläuft.

Ohne eigene Herleitung dürfen Sie im Weiteren

$$z''(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2 \right) e^{\frac{1}{2}x} \text{ und}$$

$$z'''(x) = \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} \right) e^{\frac{1}{2}x} \text{ verwenden.}$$

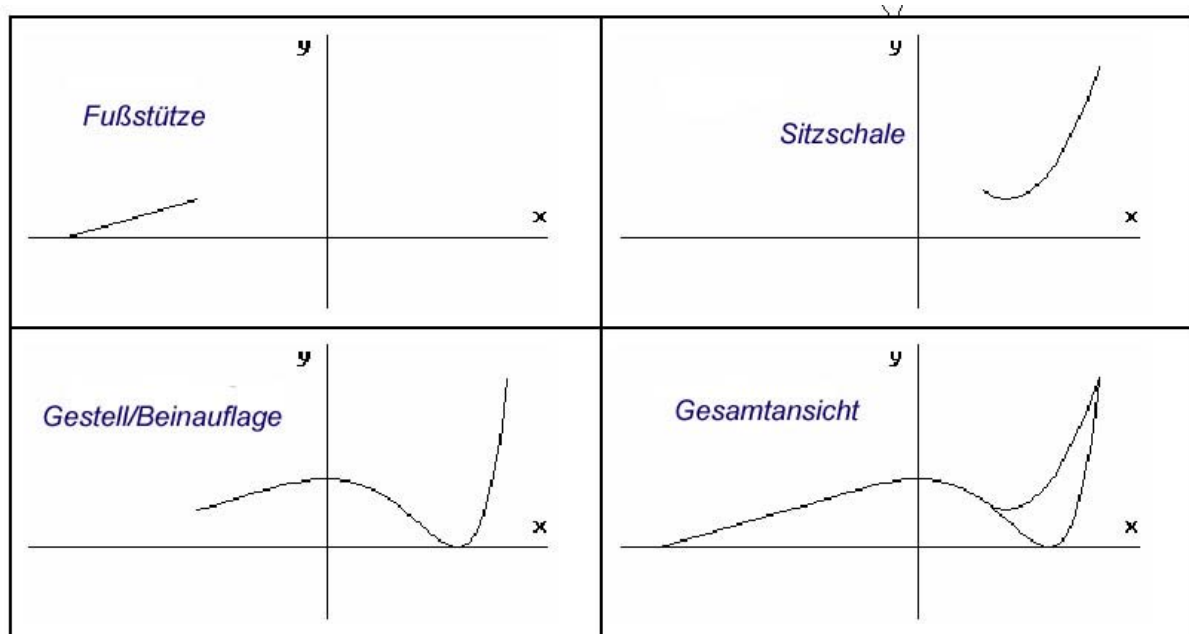


1. Berechnen Sie die Zeitpunkte, zu denen das Wasser weder ein- noch abfließt. Geben Sie die Zeitintervalle an, in denen Wasser zu- bzw. abläuft.
2. Bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Zulauftrate im betrachteten Intervall maximal ist.
Zeigen Sie, dass $z'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 \right) e^{\frac{1}{2}x}$ gilt.
3. Ermitteln Sie, welche Aussagen über die Änderung der Wassermenge zum Zeitpunkt $x = 5$ möglich sind.
4. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich die Zulauftrate am stärksten ändert.
5. Entscheiden Sie, ob es einen Zeitpunkt gibt, zu dem sich im Becken wieder die Anfangswassermenge befindet. Die Begründung soll ohne Rechnung erfolgen.
6. In dem Stausee hat sich eine bestimmte Bakteriensorte eingelagert. Zum Zeitpunkt $x = 0$ befinden sich bereits 5000 Bakterien im Stausee. Die Wachstumsratenfunktion der Bakterien ist gegeben durch $w(x) = x^3 - 12x^2 + 35x$. Dabei wird x wieder in Tagen angegeben und $w(x)$ in 10.000 Bakterien pro Tag. Ermitteln Sie die Anzahl der Bakterien nach 3 Tagen.

Aufg.-Nr.: 10	Bereich: kombinierte Funktion	Kursart: GK	WTR
---------------	-------------------------------	-------------	-----

Wellness-Liege

Im „WOLF-RENZ_DESIGN_ZENTRUM“ wird eine neue Generation an Wellness-Liegen entwickelt. Für das Topmodell „ABI 2006“ haben die Designer geschickt Ausschnitte aus verschiedenen Funktionsgraphen zusammengesetzt.



- a) Die Fußstütze ergibt sich als Verlängerung (Teil der Tangente) an das Gestell/Beinauflage g , wobei für g die Gleichung $g(x) = \frac{1}{4}e^x \cdot (x-2)^2$ gilt.
- a1) Weisen Sie nach, dass für die 1. Ableitung von g gilt: $g'(x) = \frac{1}{4}e^x \cdot (x^2 - 2x)$.
- a2) Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an g , wenn der Übergang an $x = -2$ erfolgt.
- a3) Geben Sie den Bereich für x an, in dem die Tangente als Fußstütze genutzt werden kann.
- b) Als Sitzschale haben die Designer einen Ausschnitt aus der Parabel s (2. Ordnung) gewählt. Dabei haben sie für s die Gleichung $s(x) = \frac{e}{4e-8}(x^2 - ex + 2e - 3)$ ermittelt.
- b1) Zeigen Sie, dass die Graphen von g und s an der Stelle $x = 1$ knickfrei ineinander übergehen.
- b2) Berechnen Sie die exakte Stelle des tiefsten Punktes der Sitzschale. (Rechnungen mit e , keine Rundungen)

Aufg.-Nr.: 10	Bereich: kombinierte Funktion	Kursart: GK	WTR
---------------	-------------------------------	-------------	-----

c) Für die seitliche Verblendung des Bereichs zwischen Fußstütze, Gestell/Beinauflage und Erdboden (x-Achse) sollen spezielle bebürstete Aluminiumbleche zum Einsatz kommen, die aus rechteckigen Blechen herausgeschnitten werden. Hier gilt $1LE \triangleq 0,25m$.

c1) Geben Sie mit Hilfe einer Schraffur die beschriebene Fläche in der Gesamtansicht an.

c2) Ermitteln Sie die Mindestlänge und die Mindestbreite, die das rechteckige Blech aufweisen muss.

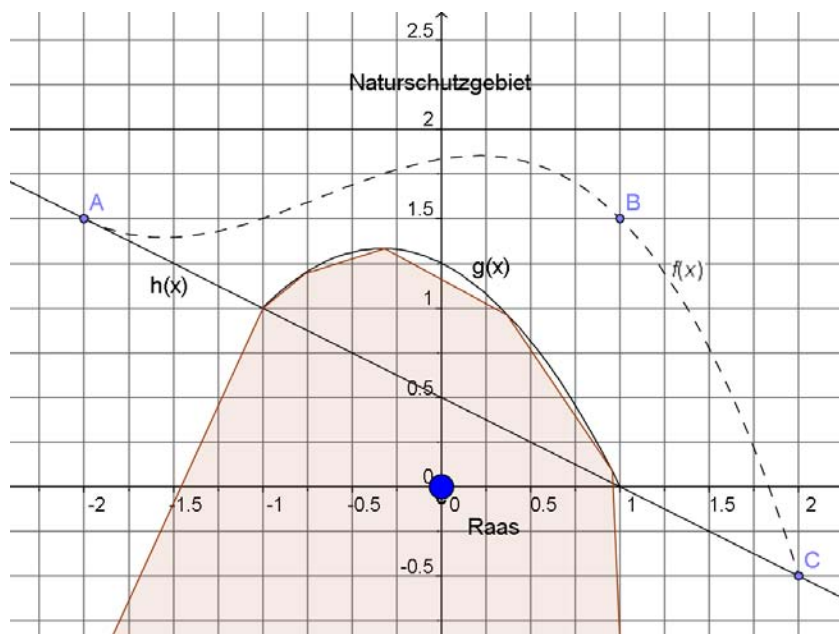
c3) Die Funktionsgleichung einer Stammfunktion G der Funktion g lautet:

$$G(x) = \frac{1}{4} e^x \cdot (x^2 - 6x + 10)$$

Ermitteln Sie den Flächeninhalt eines fertig ausgeschnittenen Verblendungsblechs in m^2 .

Umgehungsstraße

Quer und schnurgerade durch den kleinen niederrheinischen Ort Raas geht eine vielbefahrene Bundesstraße. Die Bewohner des Ortes haben lange gekämpft, nun soll endlich die langersehnte Umgehungsstraße gebaut werden. Die Abbildung zeigt einen Kartenausschnitt, auf dem die alte Bundesstraße (Gerade durch die Punkte A und C) und der ungefähre Verlauf der neuen Umgehungsstraße (gestrichelte Kurve) eingezeichnet sind (alle Angaben in km).



- Bestimmen Sie aus der Grafik die lineare Funktion, die die alte Bundesstraße beschreibt.
- Die neue Umgehungsstraße soll im Punkt A „glatt“ an der alten Bundesstraße anschließen, sie soll durch den Punkt B gehen und am Punkt C unter einem beliebigen Winkel wieder auf die Bundesstraße treffen. Bestimmen Sie mit Hilfe der Skizze und den genannten Bedingungen eine ganz-rationale Funktion dritten Grades, die die Umgehungsstraße zwischen den Anschlusspunkten beschreibt.

Zur Kontrolle: $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{11}{6}$

- Nördlich der Geraden $y = 2$ befindet sich ein Naturschutzgebiet. Der Abstand der neuen Umgehungsstraße zu diesem Gebiet soll den Abstand von 100m nicht unterschreiten. Untersuchen Sie, ob die durch die Funktion f beschriebene Straße diese Anforderung erfüllt.
- Bestimmen Sie den Punkt der Umgehungsstraße, in dem sich das Krümmungsverhalten der Straße ändert.

- Der nördliche Ortsrand von Raas ist näherungsweise parabelförmig und wird durch die Funktion $g(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ recht gut beschrieben. Die Fläche, die von der neuen

Umgehungsstraße, dem nördlichen Ortsrand und Teilen der Bundesstraße eingeschlossen wird, ist Eigentum der Gemeinde Raas und soll vollständig in ein Gewerbegebiet umgewandelt werden. Stellen Sie diese Fläche in der Graphik dar und bestimmen Sie die Höhe der Einnahmen, mit denen der Stadtkämmerer rechnen kann, wenn das Land vollständig zu einem Preis von 10 € pro m^2 verkauft wird.

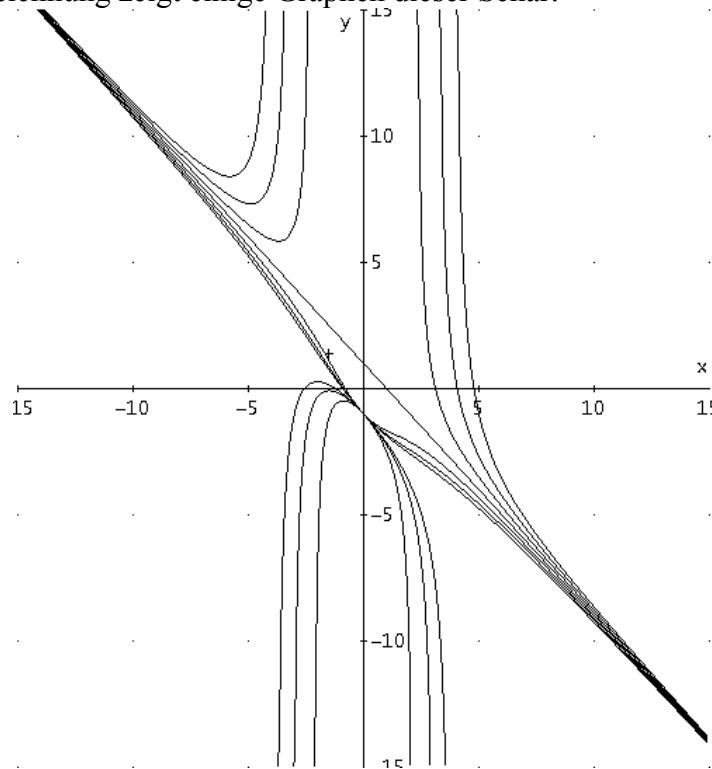
Aufg.-Nr.: 12	Bereich: gebr.-rat. Funktionenschar	Kursart: LK	CAS
---------------	-------------------------------------	-------------	-----

Funktionenschar

Durch
$$f_k(x) = \frac{x^2 - k}{x^2 + k} - x \quad \text{mit } x \in \mathbb{R} \text{ und } k \in \mathbb{R}$$

ist eine Funktionenschar gegeben.

Die nachfolgende Zeichnung zeigt einige Graphen dieser Schar:



- Beschreiben Sie wesentliche Eigenschaften, Unterschiede und Gemeinsamkeiten der Graphen.
- Untersuchen Sie, welche Graphen sich im Punkt $P(0/-1)$ schneiden.
- Zeigen Sie: Es gibt genau einen Graphen, der einen Sattelpunkt hat.
- Untersuchen Sie, für welche Parameter die Graphen Polstellen besitzen.
- Der Graph von f_k ($k > 0$) schließt mit dem Graphen von f_0 eine Fläche ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.
- A_k sei der Flächeninhalt der Fläche, die der Graph von f_k ($k > 0$) mit den Koordinatenachsen im dritten Quadranten einschließt.
 - Berechnen Sie (näherungsweise) $A_{0,5}$.
 - Begründen Sie, dass für die Flächen gilt: $A_k \leq 0,5$.

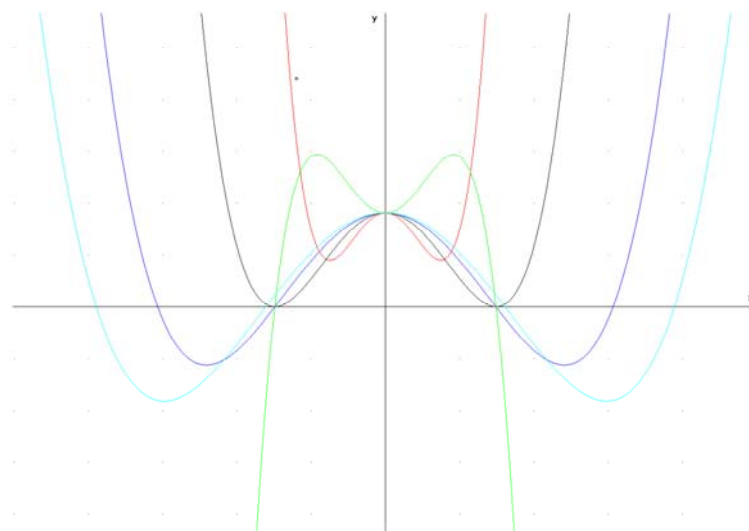
Aufg.-Nr.: 13	Bereich: ganzrat. Funktionenschar	Kursart: LK	WTR
---------------	-----------------------------------	-------------	-----

Flächenstrategien

Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{8a^3}(x^4 - 8a^2x^2) + 2$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^{\neq 0}$.

a) Untersuchen Sie für $a > 0$ den Graphen zu f_a auf Symmetrie sowie auf sein Verhalten für $|x| \rightarrow \infty$. Bestimmen Sie die Extrem- und Wendepunkte des Graphen in Abhängigkeit von a .

- b) 1. Bestimmen Sie denjenigen Wert von a hat, für den der zu f_a gehörende Graph einen Extrempunkt auf der x -Achse hat.
 2. Beschreiben Sie den Verlauf der Graphen für negative Werte a und begründen Sie Ihre Aussage.
 3. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von f in Abhängigkeit von a .
 4. Ermitteln Sie alle Werte für a , so dass der Graph zu f_a durch den Punkt $P(2 | 0)$ verläuft.
 5. Alle Graphen in der Zeichnung unten gehören zur Schar f_a . Geben Sie jeweils das passende a an bzw. den Bereich, aus dem der zugehörige Wert von a stammt, und begründen Sie Ihre Zuordnung.



c) Es soll die folgende Problemstellung bearbeitet werden: „Bestimmen Sie den Wert von a ($a > 1$), für den der Inhalt der vom Graphen zu f_a und der x -Achse oberhalb der x -Achse eingeschlossenen Fläche gleich dem Inhalt der Flächen ist, die die x -Achse und der Graph unterhalb der x -Achse umschließen.“

Zur Lösung werden die Vorschläge V 1 und V 2 gemacht:

V 1: Ich bestimme die Nullstellen x_1, x_2, x_3, x_4 mit $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ und löse die Gleichung

$$\int_{x_2}^{x_3} f_a(x) dx = 2 \left| \int_{x_3}^{x_4} f_a(x) dx \right|.$$

V 2: Ich bestimme die Nullstellen x_1, x_2, x_3, x_4 mit $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ und löse die Gleichung

$$\int_0^{x_4} f_a(x) dx = 0$$

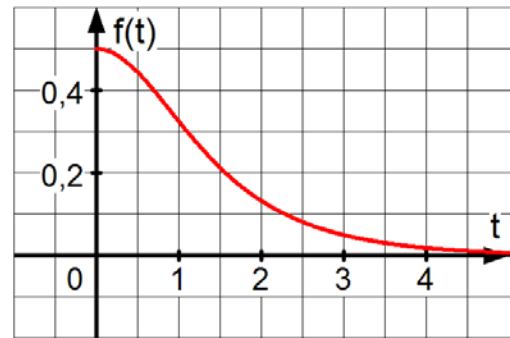
Beurteilen Sie diese beiden Vorschläge.

Aufg.-Nr.: 14	Bereich: e-Funktion	Kursart: LK	WTR
---------------	---------------------	-------------	-----

Fischbestand

Eine Forschungsgruppe versucht, die Entwicklung eines Fischbestandes in einem See durch ein mathematisches Modell zu erfassen. Zu Beginn der Untersuchung leben im See 4 Millionen Fische. Die Änderungsrate des Bestandes wird in diesem Modell durch eine Funktion f mit

$$f(t) = \frac{e^t}{(1+e^t)^2}; \quad t \geq 0$$



beschrieben (t in Jahren seit Untersuchungsbeginn, $f(t)$ in Millionen pro Jahr). Obige Abbildung zeigt den Graphen von f .

- a) Ermitteln Sie rechnerisch Nullstellen, Extrema und Wendepunkte der Funktion f .

$$(f'(t) = \frac{e^t(1-4e^t+e^{2t})}{(1+e^t)^4} \text{ kann ohne eigene Herleitung benutzt werden.})$$

- b) Untersuchen Sie das Verhalten von f für $t \rightarrow \infty$.

- c) (i) Weisen Sie nach, dass f für $t > 0$ monoton abnimmt.
(ii) Entscheiden Sie, ob dies bedeutet, dass der Fischbestand abnimmt.

- d) Leiten Sie durch Integration her, dass F mit der Funktionsgleichung

$$F(t) = \frac{-1}{e^t + 1}$$

eine Stammfunktion von f ist.

- e) (i) Begründen Sie, warum der Bestand der Fische $B(t)$ durch

$$B(t) = B(0) + \int_0^t f(x) dx$$

beschrieben wird.

- (ii) Ermitteln Sie, welcher Fischbestand nach 2 Jahren zu erwarten ist.
(iii) Ermitteln Sie, welcher Fischbestand langfristig zu erwarten ist.

Kommentar:

Die Aufgabe basiert größtenteils auf einer Aufgabe zur Abiturprüfung Mathematik 2005 (Baden-Württemberg), Wahlteil: Analysis I 3.

Aufg.-Nr.: 15	Bereich: ganzrat. Funktionenschar	Kursart: LK	WTR
---------------	-----------------------------------	-------------	-----

Olympiaschanze

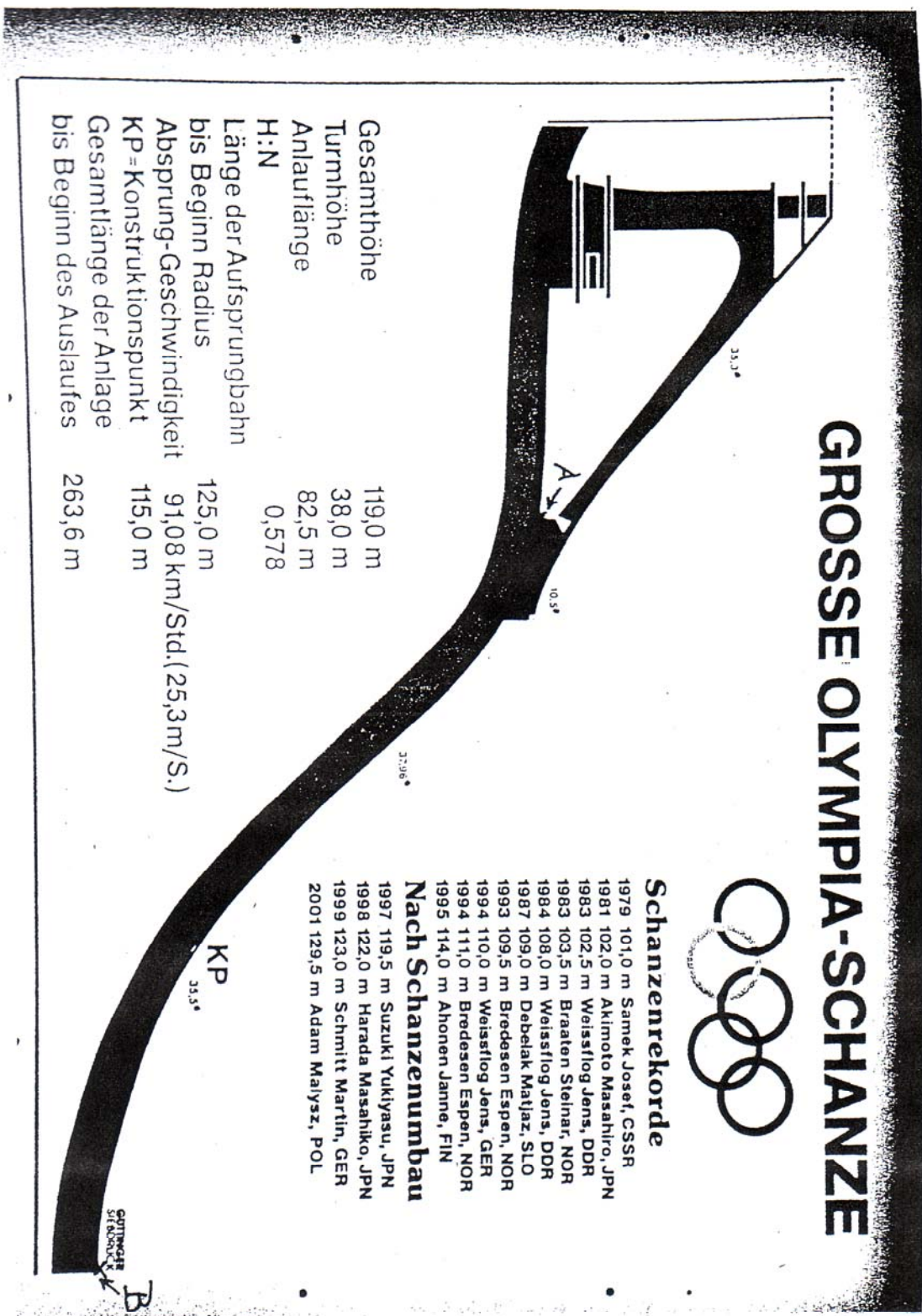
Die große Olympia-Schanze in Garmisch-Partenkirchen hat etwa das in der Abbildung erkennbare Profil. Für die markierten Punkte A und B gilt dabei: A liegt 81 m höher als B. Die waagerechte Entfernung zwischen den beiden Punkten beträgt rund 156m.

- Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion möglichst niedrigen Grades, die das Profil des Aufsprunghügels im Bereich von A bis B näherungsweise beschreibt.. Dabei liege A im Ursprung des Koordinatensystems. Die Steigung des Aufsprunghügels in den Punkten A und B werde modellhaft vereinfachend als null angenommen. Geben Sie die Koeffizienten mit voller Taschenrechner-Genauigkeit an. Auf die Kontrolle hinreichender Kriterien kann verzichtet werden.
Vergleichen Sie das maximale Gefälle des Graphen der von Ihnen ermittelten Funktion (im relevanten Bereich) mit der Angabe in der Abbildung.
- Beweisen Sie: Bei ganzrationalen Funktionen der Form $f(x)=ax^3+bx^2$ ($a, b \neq 0$) liegt die Wendestelle genau in der Mitte zwischen den beiden Extremstellen.
- Nun soll das Aussehen des Aufsprunghügels variiert werden: Der Höhenunterschied zwischen den Punkten A und B soll weiterhin 81 m betragen. Die waagerechte Entfernung sei nun k Meter ($k>0$). Die Profile der verschiedenen so entstehenden Aufsprunghügel sollen analog zu Aufgabenteil a) durch eine Funktionenschar ganzrationaler Funktionen beschrieben werden. Ermitteln Sie die Gleichung dieser Funktionenschar. (Zur Kontrolle: $f_k(x) = \frac{162}{k^3}x^3 - \frac{243}{k^2}x^2$)
Bestimmen Sie die waagerechte Entfernung zwischen A und B so, dass ein maximales Gefälle von 39° entsteht?
- Wegen Schneemangels wird der Aufsprunghügel aus Aufgabenteil a) in einer Breite von 40 m mit einer Kunstschneedecke präpariert, die (gemessen parallel zur y-Achse) überall gleichmäßig dick ist. Im Bereich zwischen den Punkten A und B werden dazu 1000 m^3 Kunstschnee aufgetragen. Berechnen Sie die Schneehöhe (gemessen parallel zur y-Achse).
- Die Länge des Aufsprunghügels zwischen den Punkten A und B kann nicht elementar berechnet werden, da es sich um eine gekrümmte Linie handelt. Leiten Sie analog zu den typischen Näherungsideen der Analysis ein Verfahren zur numerischen näherungsweisen Berechnung dieser Länge her, indem Sie die wesentlichen Schritte dieses Verfahrens beschreiben.

ANHANG: Abbildung des Schanzenprofils

Aufg.-Nr.: 15	Bereich: ganzrat. Funktionenschar	Kursart: LK	WTR
---------------	-----------------------------------	-------------	-----

Anhang zu Aufgabe 1: Abbildung des Schanzenprofils der Olympia-Schanze in Garmisch-Partenkirchen



Aufg.-Nr.: 16	Bereich: vektorielle Geometrie	Kursart: GK	WTR
---------------	--------------------------------	-------------	-----

Tennis

Die Abbildung stellt in einem dreidimensionalen Koordinatensystem schematisch das Spielfeld (Einzelfeld) eines Tennisplatzes dar. Das Feld wird in der Mitte durch ein Netz unterteilt, das von den Außenpfosten AB und EF gehalten wird. Die Netzoberkante ist in der Mitte im Punkt D niedriger als außen in den Punkten B und F, aber ansonsten geradlinig gespannt. Die angegebenen Maße des Platzes sind aus Vereinfachungsgründen auf ganze Meter gerundet. Auch die Koordinaten der unten angegebenen Punkte sind in Metern zu verstehen.

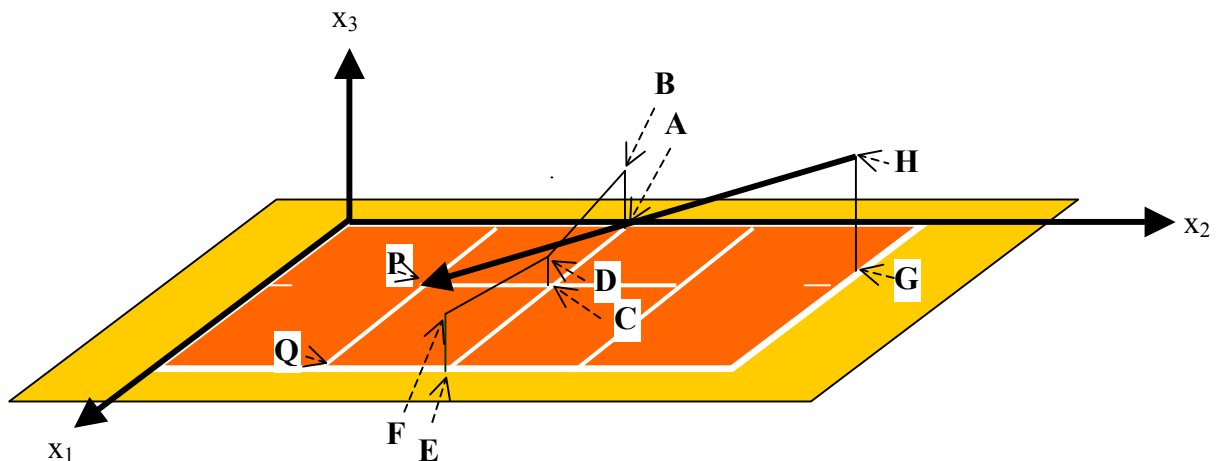


Die Bälle fliegen in unserem Modell geradlinig, wir vernachlässigen jegliche Spins oder andere Effekte wie auch Erdanziehung oder Luftreibung! Außerdem wird der Tennisball als Punkt aufgefasst.

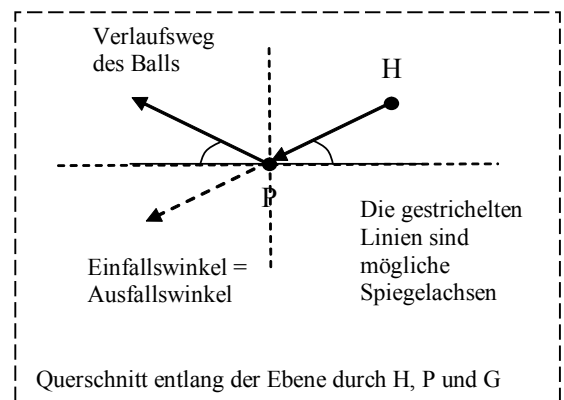
Die angegebenen Punkte des Tennisfeldes haben die folgenden Koordinaten:

A(0|12|0) B(0|12|1,1) C(4,5|12|0) D(4,5|12|0,9) E(9|12|0) F(9|12|1,1) P(4,5|6|0)
Q(9|6|0).

Im Punkt G(4|24|0) steht der Aufschläger, der versucht, den Tennisball vom Punkt H(4|24|3) seines Schlägers aus geradlinig in den Eckpunkt P des gegnerischen Aufschlagfeldes ECPQ zu schlagen.

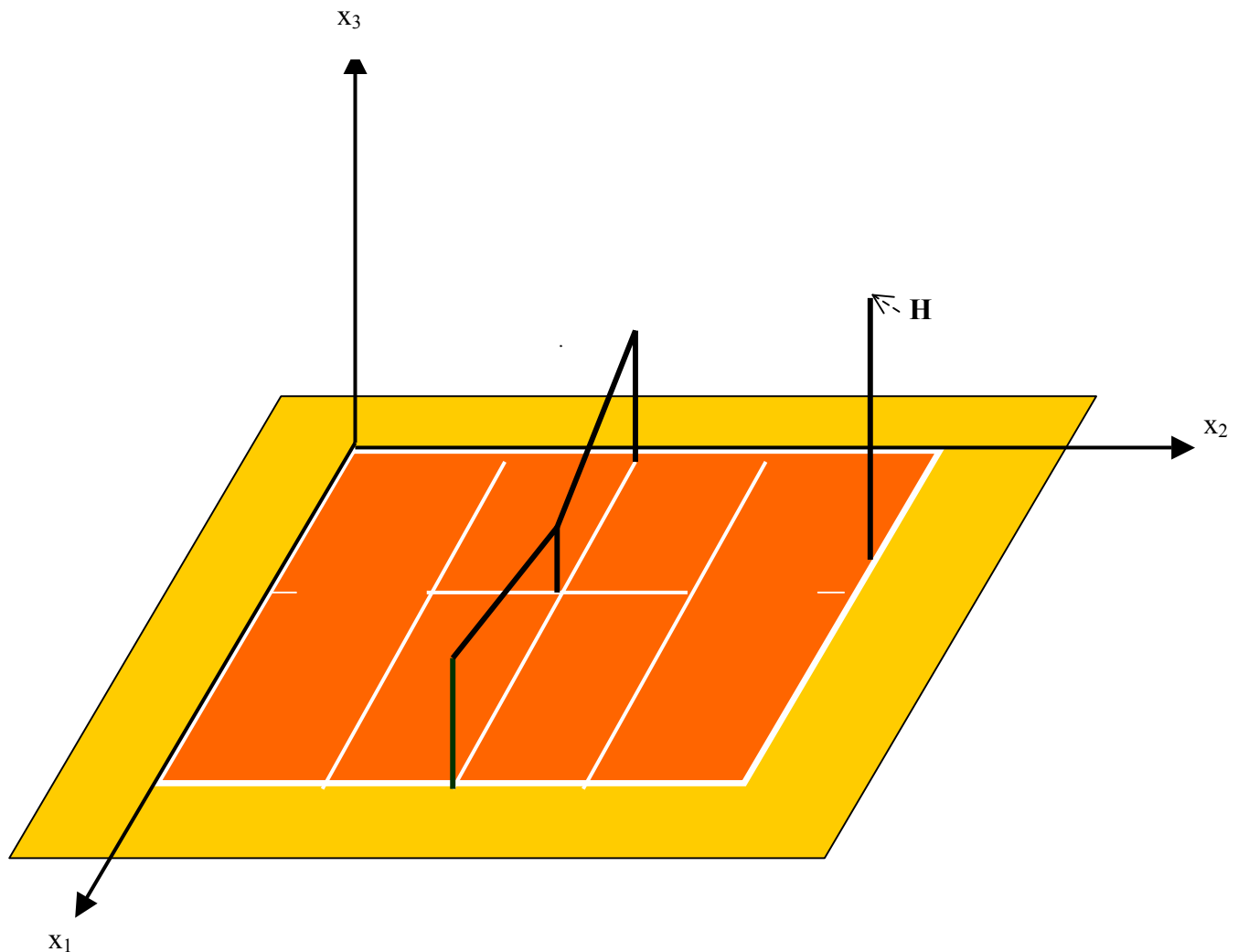


- Geben Sie die Länge und die Breite des dunkel eingefärbten Tennisfeldes an.
- Berechnen Sie, wie viele Sekunden der Ball vom Verlassen des Schlägers im Punkt H bis zum Aufprall auf den Boden benötigt, wenn der Ball mit einer Geschwindigkeit von 180 km/h den Schläger verlässt und diese Geschwindigkeit auch bis zum Aufprall auf den Boden beibehalten wird.
- Ermitteln Sie, in welchem Winkel der Tennisball im Punkt P auf dem Boden auftrifft.
- Dem Aufschläger gelingt es, seinen Aufschlag genau in dem Punkt P zu platzieren. Von dort aus springt der Ball idealtypisch, wie in der Abbildung rechts dargestellt, ab in Richtung des Gegners, der auf der Grundlinie (der x_1 -Achse) steht. I
Bestimmen Sie denjenigen Punkt S der x_1x_3 -Ebene, in dem der Schläger des Gegners den Ball zum Rückschlag (Return) trifft.



Aufg.-Nr.: 16	Bereich: vektorielle Geometrie	Kursart: GK	WTR
---------------	--------------------------------	-------------	-----

- e) Gültig ist ein Aufschlag genau dann, wenn er innerhalb des Aufschlagfeldes ECPQ landet (einschließlich der Berandungslinie).
 Beschreiben Sie einen Lösungsweg zur Berechnung der Eckpunkte derjenigen Teilfläche des Aufschlagfeldes, in dem der vom Punkt H aus geradlinig fliegende Ball landen kann.
 Geben Sie die geometrische Form dieser Teilfläche an.
 Zeichnen Sie diese Fläche in die Vorlage einschließlich der Konstruktionslinien und der zugehörigen Bezeichnungen ein.



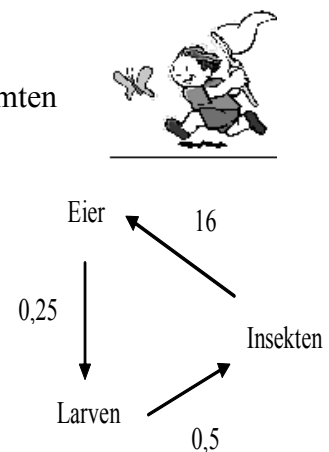
Aufg.-Nr.: 17	Bereich: Übergangsmatrizen	Kursart: GK	WTR
---------------	----------------------------	-------------	-----

Insektenpopulation

Modellhaft lässt sich die Entwicklung einer bestimmten Insektenpopulation folgendermaßen beschreiben:

Aus Eiern dieser Insektenart entwickeln sich zunächst innerhalb eines Monats Larven, die innerhalb eines Monats zu Insekten werden. Die Insekten legen wiederum nach einem Monat Eier und sterben anschließend.

Aus Beobachtungen von Biologen weiß man, dass aus 25% der Eier, die ein Insekt legt, Larven werden (die anderen 75% werden gefressen oder verenden) und dass sich die Hälfte der Larven zu vollständigen Insekten entwickelt (die andere Hälfte stirbt oder wird gefressen). Außerdem legt ein Insekt durchschnittlich 16 Eier.



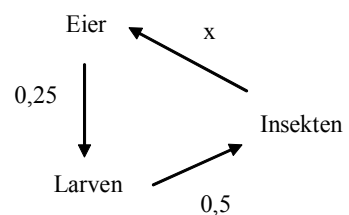
a) Zu einem bestimmten Zeitpunkt werden 40 Eier, 20 Larven und 12 Insekten gezählt. Untersuchen Sie, wie sich die Anzahlen der Eier, Larven und Insekten im Laufe von 6 Monaten entwickelt. Schreiben Sie dazu die erste Rechnung in der Matrizenschreibweise auf und füllen Sie die nebenstehende Tabelle aus.

Beginn des	Eier	Larven	Insekten
1. Monats	40	20	12
2. Monats			
3. Monats			
4. Monats			
5. Monats			
6. Monats			
7. Monats			

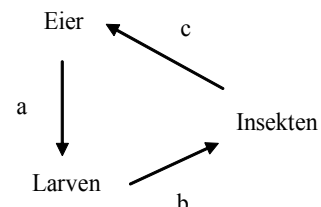
b) Die Populationen entwickeln sich in Form eines 3-monatigen Zyklus. Begründen Sie diese Aussage anhand Ihrer Tabelle. Berechnen Sie dann jeweils die Anzahlen der Eier, Larven bzw. Insekten nach einem Jahr und nach zwei Jahren.

c) Zur Bekämpfung der Populationen steht ein Insektizid zur Verfügung, das die Fortpflanzung der Insekten so beeinflusst, dass ein Insekt nur noch eine kleinere Zahl von Eiern ablegt.

Bestimmen Sie die Anzahl an Eiern, die ein Insekt ablegen darf, wenn die Insektenpopulation langfristig stabil sein soll.



Tipp: Betrachten Sie die Entwicklung der Insektenpopulation unter der Bedingung, dass ein Insekt x Eier ablegt.



d) Die Insektenpopulation soll langfristig stabil bleiben. Leiten Sie einen Zusammenhang zwischen den Parametern a , b und c her, der diese langfristige Stabilität sichert.

e) Bilden Sie die dritte Potenz der in der Teilaufgabe (a) aufgestellten Übergangsmatrix. Begründen Sie damit die im Aufgabenteil (b) beschriebene zyklische Populationsentwicklung.

Aufg.-Nr.: 18	Bereich: vektorielle Geometrie	Kursart: GK	WTR
---------------	--------------------------------	-------------	-----

Gegeben sind die Gerade g durch den Punkt $P(2 \mid 1 \mid -1)$ und den

Richtungsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Gerade h_t durch den Punkt $Q(9 \mid 12 \mid -2)$

und den Richtungsvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ t \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$

- a) Bestimmen Sie t so, dass sich die beiden Geraden schneiden, und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S .
(Ergebnis: $t = -1$; $S(6 \mid 9 \mid 7)$).
- b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte auf der Geraden g , die von Q die Entfernung $3\sqrt{11}$ haben. Erstellen Sie dazu eine Skizze an.
(Ergebnis: $A(6 \mid 9 \mid 7) = S, B(4 \mid 5 \mid 3)$)
- c) Q' sei der Spiegelpunkt von Q bzgl. der Geraden g . Tragen Sie Q' in Ihre Skizze aus Teilaufgabe b) ein und berechnen Sie die Koordinaten von Q' .
- d)
 1. Geben Sie eine Koordinatengleichung der durch die Geraden g und $h_{t=-1}$ gebildeten Ebene E an.
(mögliches Ergebnis: $8x - 5y + z = 10$)
 2. Zeigen Sie, dass die Ebene F mit $F: x + 2y + 2z = 29$ senkrecht auf der Ebene E steht.

Aufg.-Nr.: 19	Bereich: Abbildungsmatrizen	Kursart: LK	CAS
---------------	-----------------------------	-------------	-----

Gegeben sind die Abbildungsmatrix $M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sowie die Punkte $A(0/0)$, $B(6/0)$, $C(6/6)$, $D(0/6)$.

1)

- a) Bestimmen Sie die Menge aller Fixpunkte von M und bestätige, dass es sich bei dieser Punktmenge um eine Ursprungsgerade g handelt.

(zur Kontrolle und zum Weiterrechnen: $g: \vec{x} = r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = r\vec{u}$)

b)

- i) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix M .
 ii) Zeigen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse :

Ist $\vec{p} = r\vec{u} + s\vec{v}$, so gilt für den Bildvektor $\vec{p}'$: $\vec{p}' = M \circ \vec{p} = r\vec{u} + \frac{1}{2}s\vec{v}$.

c)

- i) Zeichnen Sie in dasselbe Koordinatensystem (1 Einheit = 1cm) das Quadrat $ABCD$, das Bild $A'B'C'D'$ dieses Quadrates (bzgl. M) und das Bild $A''B''C''D''$ dieses Bildes.
 ii) Erklären Sie mit Hilfe der in b) ii) angegebenen Eigenschaft:
- Ist $P(x/y)$ ein beliebiger Punkt, so liegen die Punkte P, P', P'' auf einer Geraden. (Dabei ist P' der Bildpunkt von P und P'' der Bildpunkt von P' .)
 - Parallele Vektoren werden auf parallele Vektoren abgebildet (also $\vec{w} \parallel \vec{z} \Rightarrow \vec{w}' \parallel \vec{z}'$).

d)

- i) Bestimmen Sie M^2, M^3, M^4 und erläutern Sie, weshalb $M^\infty = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ die „Grenzmatrix“ M^n für $n \rightarrow \infty$ sein könnte.

2) Berechnen Sie für $\vec{p} = r\vec{u} + s\vec{v}$ den Bildvektor $M^\infty \cdot \vec{p}$.

- a) Erklären Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus den bisherigen Teilaufgaben:
 Welche geometrische Abbildung wird durch die Abbildungsmatrix M^∞ festgelegt?

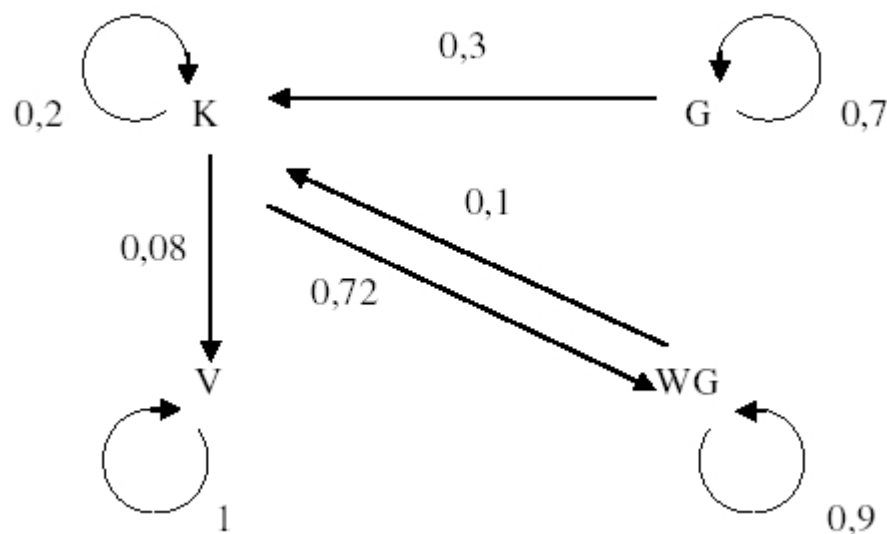
Aufg.-Nr.: 20	Bereich: Übergangsmatrizen	Kursart: LK	CAS
---------------	----------------------------	-------------	-----

Krankheit

In dieser Aufgabe soll der Verlauf einer Krankheit in einer Population untersucht werden.

Die Behandlung der Krankheit ist nicht immer erfolgreich: 8% der Erkrankten sterben an ihr. Die wieder Genesenen haben aufgrund erhöhter Abwehrkräfte eine geringere Wahrscheinlichkeit erneut zu erkranken als diejenigen, die noch nicht erkrankt waren.

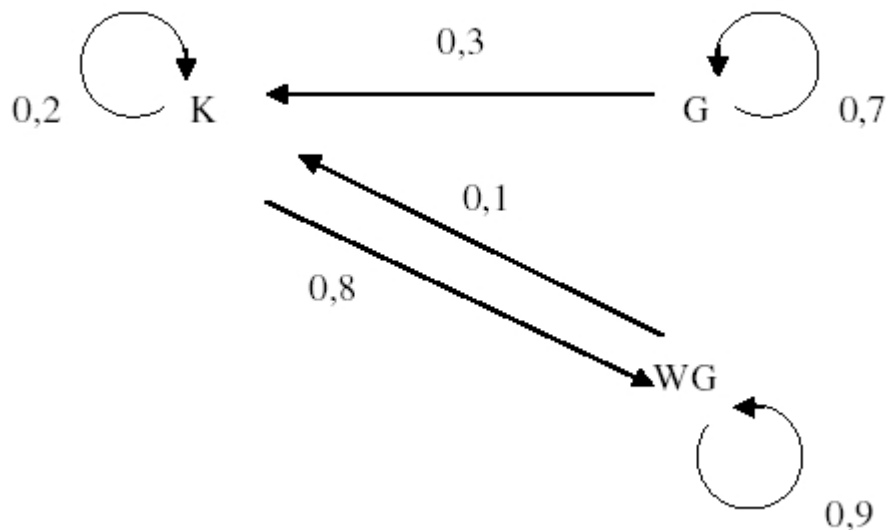
Das nachfolgende Diagramm gibt die vollständige Beschreibung der Übergänge für eine Zeiteinheit von einer Woche wieder.



- a) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix A.
- b)
 - b1) Berechnen Sie die Übergangsmatrix für einen Zeitraum von 5 Wochen.
 - b2) Geben Sie an, wie viel Prozent der anfangs Gesunden auch noch nach 5 Wochen gesund sind.
 - b3) Nennen Sie den Prozentsatz derjenigen, die anfangs gesund waren und innerhalb dieser 5 Wochen gestorben sind.
- c) In einer Siedlung von 1500 Personen bricht die Krankheit aus.
 - c1) Beschreiben Sie die Situation in dieser Siedlung nach 3 Wochen.
 - c2) Untersuchen Sie, welche langfristige Entwicklung bei gleich bleibenden Übergangswahrscheinlichkeiten in dieser Siedlung zu erwarten ist.

Aufg.-Nr.: 20	Bereich: Übergangsmatrizen	Kursart: LK	CAS
---------------	----------------------------	-------------	-----

- d) Im folgenden soll davon ausgegangen werden, dass sich die medizinischen Behandlungsmethoden soweit verbessert haben, dass niemand mehr an dieser Krankheit stirbt und dass 80% der Erkrankten innerhalb einer Woche wieder gesund werden:



- d1) Geben Sie eine vereinfachte 3x3-Übergangsmatrix B an.
d2) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix B.

Erneut bricht in einer Population von 1500 Personen die Krankheit aus.

- d3) Beschreiben Sie explizit den Verlauf des Krankenstandes durch eine (auf $\mathbb{R}^+$ erweiterte) Funktion.

(zur Kontrolle: $f(x) = 500 \cdot 0,7^x - 666 \frac{2}{3} \cdot 0,1^x + 166 \frac{2}{3}$)

Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion und berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Krankenstand am stärksten abnimmt.

- d4) Untersuchen Sie die langfristige Entwicklung des Krankenstandes.

Aufg.-Nr.: 21	Bereich: vektorielle Geometrie	Kursart: LK	WTR
---------------	--------------------------------	-------------	-----

Flugbahnen



Bei der Flugsicherung des Sportflughafens herrscht Alarmzustand:

Bert Bruch hat sich soweit von den Folgen seiner letzten Landung erholt, dass er wieder in einem Flugzeug sitzen kann. Er befindet sich derzeit im Anflug auf die Landebahn mit den Eckpunkten

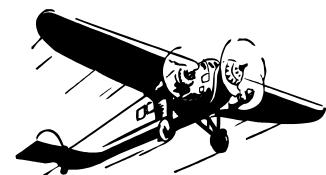
$$A(80 \mid 400 \mid 2), B(100 \mid 400 \mid 2), C(80 \mid 1200 \mid 6) \text{ und } D(100 \mid 1200 \mid 6) \\ (1 \text{ Einheit} \hat{=} 1 \text{ m})$$

Berts Flugbahn zur Landung verläuft entlang einer Geraden. Er befindet sich zum Zeitpunkt t (in s) im Punkt $X(t)$ mit

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 100 \\ -2550 \\ 228,75 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0,1 \\ 22 \\ -1,5 \end{pmatrix}.$$

- Zeigen Sie, dass die vier Eckpunkte der Landebahn in einer Ebene liegen und ein Rechteck bilden.
- Bestimmen Sie den Abstand der Flugbahn von der (näherungsweise als punktförmig betrachteten) Flugsicherung in $F(0 \mid 0 \mid 8)$.
- Damit Bert nicht schon wieder eine Bruchlandung macht, muss er natürlich im Bereich der Landebahn aufsetzen. Seine oben angegebene Flugbahn darf beim Aufsetzen nicht um mehr als 6° gegen die Landebahn geneigt sein. Prüfen Sie, ob Bert beiden Bedingungen gerecht wird und es diesmal schafft.
- Auch ein zweites Flugzeug im Bereich des Sportflughafens bewegt sich entlang einer Geraden. Es befindet sich zum Zeitpunkt t im Punkt $Y(t)$ mit

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 53 \\ -410 \\ 43,75 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -30 \\ 4 \end{pmatrix}.$$



Weisen Sie nach, dass die Flugbahn von Bert Bruchs Flugzeug die Flugbahn dieses Flugzeuges schneidet.

Begründen Sie, dass es trotzdem nicht zu einem Zusammenstoß beider Flugzeuge kommt.

- Berechnen Sie, wo sich die beiden Flugzeuge zum Zeitpunkt $t = 50$ befinden. Berechnen Sie außerdem den Abstand der beiden Flugzeuge zu diesem Zeitpunkt.
- Bestimmen Sie den Abstand $d(t)$ der beiden Flugzeuge zu einem beliebigen Zeitpunkt t . Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt die beiden Flugzeuge ihren kleinsten Abstand haben.

Aufg.-Nr.: 22	Bereich: Übergangsmatrizen	Kursart: LK	WTR
---------------	----------------------------	-------------	-----

Ödnis im Osten

Bis zu 50 Prozent seiner heutigen Bevölkerung wird Deutschlands Osten langfristig einbüßen. Diese Prognose wagen Forscher des Leibniz-Instituts für Länderkunde in Leipzig. Nun fordern sie Mut zum gekonnten Schrumpfen. (Stern, November 2004)

Zu Beginn des Jahres 2004 lebten 69,5 Mio Menschen in den westdeutschen Bundesländern (einschließlich Berlin). In den fünf neuen Bundesländern lebten 13,5 Mio Menschen. Im Laufe des Jahres siedelten 1,2% der Bevölkerung aus den neuen in die alten Bundesländer um. In die umgekehrte Richtung waren es hingegen nur 0,1%.

- Gib einen Übergangsgraphen (Gozintho-Graphen) und eine Übergangsmatrix an, die den obigen „Austauschprozess“ zwischen den alten Bundesländern (A) und den neuen Bundesländern (N) beschreiben.
- Es soll nun im Weiteren versucht werden, mit Hilfe der Übergangsmatrix aus Aufgabenteil a) Prognosen über die nähere oder fernere Entwicklung der Bevölkerungsverteilung in Deutschland zu erstellen. Nenne Schwachpunkte dieses Prognosemodells und gib an, welche Annahmen man für alle folgenden Überlegungen zu Grunde legen müsste.
- Berechne die prognostizierten Bevölkerungszahlen in A und N für die Jahre 2005 und 2006.
- Berechne für die Übergangsmatrix M die Potenzen M^2 und M^3 . Interpretiere die Koeffizienten von M^2 im Problemkontext und nutze dein Ergebnis zur Kontrolle von Aufgabenteil c).
- Ermittle in deinem groben Prognosemodell eine stabile Grenzverteilung der Einwohnerzahlen und vergleiche dein Ergebnis mit der einleitenden Stern-Meldung.
- Berechne einen Wert für die Abwanderungsquote aus den neuen Bundesländern, der erreicht werden müsste, damit bei gleichbleibender Zuwanderungsquote aus den alten Bundesländern langfristig eine Bevölkerungszahl von 10 Mio nicht unterschritten wird.

Aufg.-Nr.: 23	Bereich: Übergangsmatrizen	Kursart: LK	WTR
---------------	----------------------------	-------------	-----

Bevölkerungsentwicklung

Eine Stadt hatte im Jahr 1990 die Einwohnerzahl von 100.000 Bürgern, welche in den folgenden Jahren stagnierte.

Im Jahr 1990 lebten 80.000 Einwohner in der City (C) und 20.000 in den Vororten (V). Für 1995 und 2000 sind folgende Daten bekannt:

Jahr	Einwohner in der City (C)	Einwohner in den Vororten (V)
1995	76.000	24.000
2000	73.200	26.800

Die Erhebungen wurden immer zu Jahresbeginn durchgeführt.

- Bestimmen Sie die stochastische Übergangsmatrix A für die Bevölkerungsentwicklung innerhalb der Stadt. Dabei beträgt der Zeitraum für einen Übergang wie im Eingangstext fünf Jahre. Gehen Sie von gleich bleibenden prozentualen Umzugstrends aus. Zeichnen Sie ein Diagramm, das die Bevölkerungsbewegungen veranschaulicht und berechnen Sie mit Hilfe von A die City-Vorort-Verteilung für den Beginn der Jahre 2005 und 2010.

Bestimmen Sie ebenfalls die Verteilung für den Beginn von 1985.

Zur Kontrolle: $A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$.

- Bestimmen Sie die stationäre Verteilung der Einwohner in der City und den Vororten.

- Sei nun $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ mit $0 < p < 1$ und $0 < q < 1$ eine beliebige stochastische Matrix. Ermitteln Sie für A denjenigen Fixvektor, dessen Koordinaten die Summe 1 haben.

- Weisen Sie für die Matrix A aus Teilaufgabe 3 nach: Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und das Produkt von $A \cdot \vec{v}$ sind Vielfache voneinander.

Aufg.-Nr.: 24	Bereich: vektorielle Geometrie	Kursart: LK	WTR
---------------	--------------------------------	-------------	-----

Dreieckspyramide

Gegeben sind die Punkte

$A(-6; 8; 7)$, $B(-3; -4; 4)$, $C(1; -8; 6)$ und $D(9; -4; -2)$.

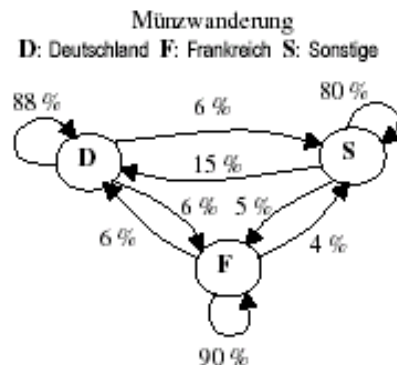
- Ermitteln Sie die Koordinatenform der Ebene E, die durch die drei Punkte A, B und C gegeben ist. (mögliches Ergebnis: $2x + y - 2z = -18$)
- Geben Sie die Schnittpunkte S_x , S_y und S_z der Ebene E mit den Koordinatenachsen an und zeichnen Sie das Dreieck $S_x S_y S_z$ in ein Koordinatensystem ein.
($1 \text{ LE} \cong 0,5 \text{ cm}$, Verkürzungsfaktor in x-Richtung $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$)
- Zeigen Sie, dass der Punkt D außerhalb der Ebene E liegt und berechnen Sie den Abstand des Punktes D von der Ebene E.
- Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D' , den man durch Spiegelung des Punktes D an der Ebene E erhält.
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC sowie das Volumen der Dreieckspyramide, die das Dreieck ABC gemeinsam mit dem Punkt D bildet.
- Durch $h_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1+2k \\ 2-2k \\ 2+k \end{pmatrix}$ ($t, k \in \mathbb{R}$) ist eine Geradenschar mit dem gemeinsamen Punkt A gegeben. Zeigen Sie, dass alle Geraden der Schar in der Ebene E liegen.
- Entscheiden Sie, ob die Gerade AC eine Gerade der obigen Geradenschar h_k ist.
- Berechnen Sie den Schnittwinkel, den die Gerade AC mit der Geraden h_5 einschließt.

Aufg.-Nr.: 25	Bereich: Übergangsmatrizen	Kursart: LK	WTR
---------------	----------------------------	-------------	-----

Münzwanderung

Zum 1. 1. 2002 wurden in allen beteiligten EU-Ländern Euro-Münzen in Umlauf gebracht.

In jedem Land wurden ausschließlich Münzen eigener Prägung eingesetzt. Für die dann einsetzende „Münzenwanderung pro Jahr“ zwischen den Gebieten **D**eutschland, **F**rankreich und **S**onstige Länder sollten sich die jährlichen Wanderungsanteile gemäß untenstehendem Übergangsgraphen verhalten.



- Erstellen Sie für diesen Vorgang die Übergangsmatrix A , und beschreiben Sie die Übergänge in Worten.
- Ermitteln Sie unter den genannten Hypothesen die prozentuale Verteilung der „deutschen“ Münzen auf die drei Gebiete (D, F, S) zum 1. 1. 2003, zum 1.1.2004 und zum 1.1.2006, und geben Sie die Übergangsmatrix für 2 Jahre an.

Ihre Startverteilung beschreibt der Vektor $\vec{D}_{02}$ mit $\vec{D}_{02} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zum 1.1.02 befinden sich also 100% der deutschen Münzen in Deutschland.

- Untersuchen Sie, ob es eine stationäre Verteilung der Münzen auf die drei Gebiete gibt, und geben Sie diese ggfs. an.
- Zum 1.1.2002 wurden in Deutschland 800 Mio, in Frankreich 600 Mio und in den sonstigen Ländern 150 Mio Münzen ausgegeben. Ermitteln Sie die Gesamtanzahl aller Münzen jeweils in den drei Gebieten zum 1.1.2003, und erklären Sie, inwieweit man bei dieser Problemstellung die Matrixmultiplikation einsetzen kann.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass am 1.1.2004
 - eine deutsche Euromünze Deutschland nie verlassen hat.
 - eine im Ausland gewesene „deutsche“ Münze wieder in Deutschland ist.
 - eine von Ihnen in Deutschland gefundene „deutsche“ Münze in Frankreich war.